Beziehungshaltigkeit und Vernetzungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I – Konkretisierung theoretischer Überlegungen durch *Aufgabennetze*

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades Dr. rer. nat.
im Fach Didaktik der Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt-Universität zu Berlin

von Swetlana Nordheimer

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin: Prof. Dr. Jan-Hendrik Olbertz

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II: Prof. Dr. Elmar Kulke

Gutachter:

1. Prof. Dr. Andreas Filler
2. Prof. Dr. Wolfgang Schulz
3. Prof. Dr. Jürgen Maaß

Tag der Verteidigung: 10.06.2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Einleitung der vorliegenden Arbeit ist etwas unüblich, weil sie sowohl durch theoretische Überlegungen als auch praktische Erfahrungen motiviert wurde. Deshalb wird für das in 1.1 formulierte Problem bereits in 1.2 der erste Lösungsversuch skizziert. Daraus wird in 1.3 das Ziel des Forschungsvorhabens abgeleitet, das mit Hilfe der in 1.4 formulierten Leitfragen und in 1.5 begründeten Forschungsmethoden verfolgt wird. Der Aufbau der gesamten Arbeit wird in 1.6 vorgestellt.

1.1 Motivation der Arbeit

Die Problemstellung der vorliegenden Arbeit ist aus der Beschäftigung mit der von Schupp (2002) entwickelten *Aufgabenvariation* erwachsen. Schupp schlägt vor, im Anschluss an eine bereits formulierte und gelöste Aufgabe, diese in der Rückschau[1] zu variieren. Die ausgewählten Variationen werden anschließend gelöst und diskutiert. Eines der Ziele der Aufgabenvariation besteht Schupp zufolge darin, vernetztes Denken der Schüler[2] zu fördern (vgl. Schupp 2002, 13ff.).[3] Meine Erfahrungen im Nachhilfeunterricht zeigten auf der anderen Seite, dass es vielen Schülern nicht gelingt, ihre Kenntnisse aus dem Mathematikunterricht zum Lösen von Aufgaben und Problemen zu vernetzen. Sie nehmen Mathematik als durch die Klassenarbeiten voneinander getrennte Themenbereiche oder Schulbuchkapitel wahr (vgl. Bauer 1988).

Im Austausch mit Lehrern wurde bestätigt, dass das beschriebene Problem praktische Relevanz besitzt. Andererseits schien die von Schupp vorgeschlagene Methode der *Aufgabenvariation* Erfolg bei der Lösung des Problems zu versprechen. Die meisten Lehrer befürchteten jedoch, dass die Schüler sich vom Rahmenlehrplan „wegvariieren". Dem könnte eine stärkere Bindung der *Aufgabenvariation* an die curricularen Vorgaben entgegenwirken. Daraus ist die Idee der *Kapitelübergreifenden Rückschau* als Vorläufer für *Aufgabennetze* entstanden. Am Ende des Schuljahres 2007/2008 wurde sie an einem

[1] Die Bedeutung von *Vorschau* und *Rückschau* unterstreichen auch Ruf und Gallin (1999, 57).

[2] Im Folgenden werden für „Schülerinnen und Schüler" sowie „Lehrerinnen und Lehrer" aus Gründen der besseren Lesbarkeit jeweils die abkürzenden Bezeichnungen „Schüler" und „Lehrer" verwendet.

[3] In den Bildungsstandards (KMK 2012, 11) wird hervorgehoben: *„Für den Erwerb der Kompetenzen ist im Unterricht auf eine Vernetzung der Inhalte der Mathematik untereinander ebenso zu achten wie auf eine Vernetzung mit anderen Fächern."*

Gymnasium ausprobiert und im Folgejahr auf einem Doktorandentreffen in Potsdam vorgestellt. Die Reflexion der dort geäußerten Kritik führte zu einer Auseinandersetzung mit den theoretischen Aspekten von *Vernetzungen im Mathematikunterricht* und seiner *Beziehungshaltigkeit.* Somit spielte sich die vorliegende Untersuchung von Anfang an zwischen praktischen Erprobungen und theoretischen Auseinandersetzungen ab. Welche theoretischen Bezüge Schupps Verständnis von *Vernetzung* aufweist, wird im Folgenden thematisiert.

Vernetzung bei Schupp

Schupp (2002) rezipiert die Arbeit von Brinkmann (2002) zu *Vernetzungen* im Mathematikunterricht, deshalb liegt die Vermutung nahe, dass die Begriffe bei beiden Autoren ähnlich verwendet werden. Er konzentriert sich auf Unterrichtsbeispiele und gibt keine expliziten Definitionen. Deshalb wird bei der ersten Erprobung der Begriff *Vernetzung* mit Verweis auf Schupp verwendet und nicht weiter expliziert. Was er unter *Vernetzungen* versteht, wird im folgenden Zitat angedeutet:

> *„Eine solch lokale Vernetzung (im Unterschied zu eher globalen Zusammenführungen bei den üblichen Gesamtwiederholungen) kann auch dem schon von Wagenschein 1968 gerügten, weil erdrückenden Turmcharakter der Schulmathematik vorbeugen. Jedenfalls schafft Aufgabenvariation Verbindungen zu früherem Wissen (und gibt damit Möglichkeiten impliziter Wiederholung), zu anderem Wissen (fächerübergreifende oder zumindest kapitelübergreifende Bezüge) und zu (curricular) späterem Wissen.“* (Schupp 2002, 13)[4]

Schupps Anspruch ist also keine „globale“ Betrachtung von Zusammenhängen, sondern „lokale Vernetzung“ von mathematischen Gebieten. Damit sind beispielsweise Bezüge zwischen Geometrie, Arithmetik, Algebra und Elementen der Stochastik gemeint. Derartige innermathematische Beziehungen bezeichnet Schupp als „kapitelübergreifend“, weil sie über die Grenzen der Schulbuchkapitel oder Unterrichtseinheiten hinausgehen. Dies erklärt gleichzeitig die Bezeichnung für die im Folgenden vorgestellte Unterrichtsmethode.

1.2 Die Methode der *Kapitelübergreifenden Rückschau* als Ausgangspunkt

Im Folgenden wird Schupps *Aufgabenvariation* zur *Kapitelübergreifenden Rückschau* abgewandelt. Dabei soll durch *Initialaufgaben* eine stärkere Bindung an die Vorgaben

[4] Bemerkenswert ist an dem Zitat im Hinblick auf das nächste Kapitel der Arbeit der Verweis auf Wagenschein. An dieser Stelle berühren sich bei Schupp die Konzepte *Vernetzungen* und *Beziehungshaltigkeit.* Das Letztere geht unter anderem auf die Arbeiten von Wagenschein zurück. Metaphorisch gesprochen möchte auch Schupp dem „Turmcharakter“ der Mathematik vorbeugen. Mit dieser Metapher wird häufig gegen statische Aspekte der Mathematik im Unterricht argumentiert.

des Lehrplans unterstützt werden. Das Vorgehen wird an Beispielen für eine 8. Klasse eines Gymnasiums veranschaulicht.

1.2.1 Konstruktion der Unterrichtsmethode

Die *Kapitelübergreifende Rückschau* ist für einen Einsatz am Ende eines Schuljahres konzipiert. Sie soll in erster Linie die Vernetzung der Unterrichtsinhalte des zurückliegenden Jahres fördern, aber auch propädeutisch einen Ausblick auf den zukünftigen Mathematikunterricht geben.[5]

Die einzelnen Phasen der Methode werden in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Vorbereitung	Zu Anfang lösen Schüler im Klassenverband eine *Einstiegsaufgabe*. Diese deutet durch ein bestimmtes Objekt (eine Zeichnung, ein geometrisches Modell, ein Applet) den gemeinsamen Kontext der Wiederholungsstunden an.
Lösen der Initialaufgaben in Gruppen	Den Schülern werden mehrere Initialaufgaben vorgestellt. Jeder Schüler entscheidet sich für eine der *Initialaufgaben*. Alle Schüler mit der gleichen Aufgabe setzen sich in einer Gruppe zusammen, um diese gemeinsam zu lösen und die Präsentation der Aufgabe für ihre Mitschüler vorzubereiten.
Entwickeln von neuen Aufgaben in Gruppen	Die Gruppen werden neu zusammengestellt. Jetzt treffen sich in einer Gruppe Experten von verschiedenen *Initialaufgaben*. Die Schüler werden aufgefordert, im Expertenaustausch eigene Aufgaben, die verschiedene Gebiete einbeziehen, zu erstellen. Dafür können sie die gelösten Initialaufgaben variieren und kombinieren.
Auswertung	Anschließend werden die selbst erstellten Aufgaben im Plenum der ganzen Klasse vorgestellt, diskutiert und gewürdigt.

Die *Einstiegsaufgabe* soll einen gemeinsamen Ausgangspunkt schaffen, zu dem die Schüler im weiteren Verlauf der Erprobung zurückkehren können, um so Orientierung und Halt zu finden. Während bei der *Aufgabenvariation* nach Schupp eine *Initialaufgabe* im Klassenverband gelöst und anschließend variiert wird, werden den Schülern bei der *Kapitelübergreifenden Rückschau* mehrere *Initialaufgaben* angeboten. Die Bearbeitung der *Initialaufgaben* erfordert durch die Wahl einer anderen Sozialform mehr Zeit. Die ganze Schulklasse wird deshalb in drei bis sechs Gruppen eingeteilt. Jede dieser Gruppen soll sich mit einer *Initialaufgabe* beschäftigen. Diese kann sich schwerpunktmäßig auf ein Kapitel des Schulbuches bzw. eine Unterrichtseinheit beziehen. Sie kann aber auch mit den Inhalten anderer Kapitel verbunden sein. In der Auswertung der gelösten *Initialaufgaben* können zwischen den einzelnen Aufgaben inhaltliche Bezüge hergestellt werden. Durch diese Bezüge werden neue Lösungswege für das bereits Gelöste ermöglicht. Hierbei können neue kapitelübergreifende Fragestellungen aufkommen. Diese bestimmen

[5] Dadurch wird in gewissem Maße eine Vorschau auf das spätere Wissen gegeben ohne dass in den Aufgabenformulierungen inhaltlich zu stark vorgegriffen wird.

ihrerseits die nächste Phase der *Kapitelübergreifenden Rückschau*. In dieser Phase können die Schüler in neuen Kleingruppen zusammenarbeiten und selbständig neue Aufgaben formulieren. Kapitelübergreifende Bezüge werden hierbei dadurch hergestellt, dass ein Objekt (beispielsweise das Tangram) bereits in den Initialaufgaben aus verschiedenen mathematischen Perspektiven (*räumlich-geometrisch, eben-geometrisch, mit Hilfe von Formeln, im Koordinatensystem*) interpretiert wird. Die Konzentration auf ein bestimmtes Objekt und seine Aspekte sowie die rückblickende Interpretation dieses Objekts im Lichte verschiedener mathematischer Gebiete ist sowohl für die Gruppenarbeit als auch für fachinhaltliche Aspekte der lokalen Vernetzung entscheidend.

1.2.2 Erprobung im Schuljahr 2007/08

Um die Zielstellung der Arbeit zu präzisieren, werden hier Ausschnitte aus der Erprobung der *Kapitelübergreifenden Rückschau* an einem Gymnasium in Berlin beschrieben.[6] Die Erprobung erstreckte sich über drei Unterrichtsstunden. Die ausgewählte Schulklasse wurde im Vorfeld innerhalb von mehreren Wochen im Mathematikunterricht beobachtet. Ausgehend davon wurden gemeinsam mit dem Lehrer die *Einstiegsaufgabe* und die *Initialaufgaben* entwickelt.

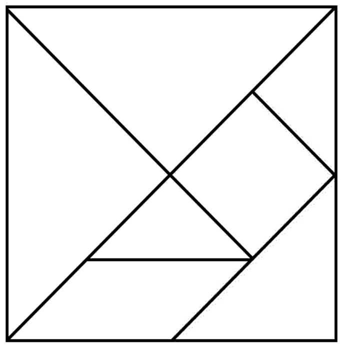


Abbildung 1.1: Einstieg

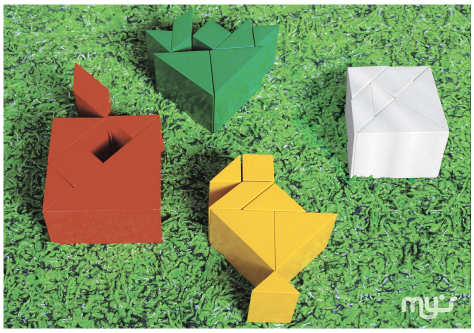
Die *Einstiegsaufgabe* lautete: *„Lege mit allen sieben Steinen ein Quadrat.“* und wurde als Einzelarbeitsauftrag bearbeitet. Zur Bearbeitung stand jedem Schüler ein Tangram-Spiel aus Holz zur Verfügung. Die Lösung dazu ist in der Abbildung 1.1 dargestellt. Anschließend wurden in Expertengruppen *Initialaufgaben* gelöst. Diese beziehen sich ebenfalls auf die in der Abbildung 1.1 dargestellte Lösungsfigur. Exemplarisch werden hier vier Initialaufgaben aufgeführt.

Beispiele für Initialaufgaben

Die Initialaufgaben[7] sind so konstruiert, dass sie unabhängig voneinander gelöst werden können. Da das Tangram-Spiel hier in verschiedenen mathematischen Kontexten auftritt, wird es in jedem Kontext anders interpretiert. In der Aufgabe „Würfel“ soll das Tangram als ein geometrischer Körper interpretiert und in seiner Gesamtheit zum Würfel variiert werden. Die Aufgabe „Lineare Gleichungssysteme“ erfordert eine Interpretation des

[6]Eine ausführlichere Darstellung der Erprobung mit dem vollständigen Satz der Initialaufgaben kann in Nordheimer (2011) nachgelesen werden.

[7]Zwei weitere Aufgaben bezogen sich auf Graphen von linearen Funktionen und Vergrößerung der Tangram-Steine zu Tischplatten.



Aufgabe: „Würfel“
Auf der Abbildung rechts seht ihr würfelförmige Tangram-Spiele. Die Steine sind aus Blech und innen hohl. Wie viel cm^2 Blech braucht man für ein würfelförmiges Tangram-Spiel, wenn man von den Maßen des Holz-Tangrams ausgeht?

Aufgabe: „Lineare Gleichungssysteme“
Zeichnet die gesamte quadratische Lösungsfigur in ein Koordinatensystem. Erstellt lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen, deren Lösungen den Eckpunkten der Tangram-Steine entsprechen.

Aufgabe: „Symmetrie“
Zeichnet eure gesamte quadratische Lösungsfigur. Welche symmetrischen Tangram-Steine entdeckt ihr in dieser Zeichnung? Beschreibt und begründet gegebenenfalls die Symmetriearten und zeichnet die Symmetrieachsen bzw. Symmetriezentren ein.

Aufgabe: „Dart“
Es gibt ein neues Magnet-Dartspiel auf dem Markt, das genau wie ein quadratisches Tangram-Puzzle aussieht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Parallelogramm bzw. ein Dreieck zu treffen?

Tangrams als eine ebene geometrische Figur, die mit Hilfe von Koordinaten und Gleichungen beschrieben werden kann. Auch in der nächsten Aufgabe wird Tangram als eine ebene Figur verstanden. Diese erscheint aber nicht in einem Koordinatensystem, sondern soll auf Symmetrien untersucht werden. Schließlich wird das Tangram-Spiel in der Aufgabe „Dart“ zu einer Dartscheibe. Auch hier ist eine Deutung des Tangrams als ebene geometrische Figur zur Bearbeitung der Fragestellung ausreichend. Die Sicht auf das Tangram-Spiel ändert sich mit dem mathematischen oder außermathematischen Blickwinkel der jeweiligen Aufgabe. Gerade darin besteht das Potenzial der Initialaufgaben in ihrer Gesamtheit.

Beim Lösen von Initialaufgaben blieb jede Expertengruppe bei dem durch die Aufgabenstellung bestimmten bzw. selbst gewählten Kontext der Aufgabe. Beim Entwickeln von neuen Aufgaben in Gruppen durften die Schüler den Kontext selbst auswählen. In der Auswertung wurden die Schüler mit verschiedenen Aufgaben konfrontiert und sollten dementsprechend das Tangram-Spiel unterschiedlich betrachten.

Beispiele für Schüleraufgaben

Die beim Lösen und Auswerten von Initialaufgaben gesammelten Erfahrungen konnten in die Entwicklung von neuen Aufgaben durch Schüler einfließen. Hier werden exemplarisch drei dieser Aufgaben vorgestellt.

Eine der Aufgaben lautet im Original folgendermaßen: *Zeichnet eure gesamte Lösungsfigur in ein Koordinatensystem. Welche Symmetrien findet ihr auf dieser Zeichnung? Nennt die Symmetriearten und gebt für alle Symmetrieachsen die entsprechende Funktionsgleichung an.* In der Abbildung 1.2 ist die von den Schülern hergestellte Zeichnung dokumentiert. Der Kontext der Aufgabe ist rein mathematisch. Bei minimaler Veränderung der Initialaufgabe „Symmetrie" (S. 4) entsteht hier eine neue, über die Grenzen des Schulbuchkapitels hinausgehende Fragestellung, die Begriffe aus den Themenbereichen *Symmetrie* und *Funktionsgleichungen* verbindet.[8]

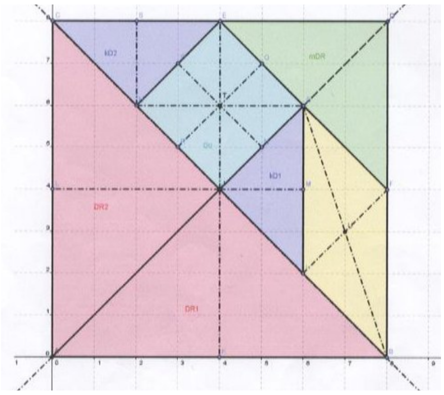


Abbildung 1.2: Symmetrieachsen

Die Aufgabe „Diskokugel" (siehe Abb. 1.3 und Abb. 1.4) ist eine Variation der Initialaufgabe „Dart" (S. 4). Die Dartscheibe wird hier zur „Diskokugel" abgewandelt, die die Form eines Würfels besitzt. Seine Flächen zeigen jeweils quadratische Tangramfiguren. Es wird nach der Wahrscheinlichkeit, dreieckige Flächen mit einem Pfeil zu treffen, gefragt. Symmetrieachsen der einzelnen Flächen werden zu „Mehr-Punkte-Linien", die gezählt werden sollen. Dass die „Mehr-Punkte-Linien" nur dann getroffen werden, wenn sie eine gewisse Breite haben, wird in der Aufgabenstellung nicht beachtet. Schließlich soll die Größe einer Verpackung für die „Diskokugel" berechnet werden. In dieser Aufgabe werden geometrische Themenbereiche wie beispielsweise *Symmetrie* und *Flächenberechnung* mit *elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung* verbunden. Nur, wer schießt schon mit Dartpfeilen auf eine „Diskokugel"? Die Berührungen mit dem Leben der Schüler außerhalb der Schule sind

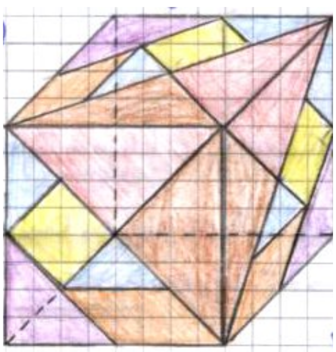


Abbildung 1.4: Zeichnung

[8]Im Sinne der Definition des verwendeten Lehrbuchs wäre es günstiger, von „Gleichungen" bzw. „Geradengleichungen" als von „Funktionsgleichungen" zu sprechen. Nach dem eingesetzten Lehrbuch („Elemente der Mathematik 8" aus dem *Schroedel-Verlag*) handelt es sich nur dann um eine Funktion, wenn einem oder mehreren x-Werten höchstens ein y-Wert zugeordnet wird. Dies ist bei den Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen, nicht der Fall. Hingegen handelt es sich bei den Parallelen zur x-Achse um Funktionsgraphen.

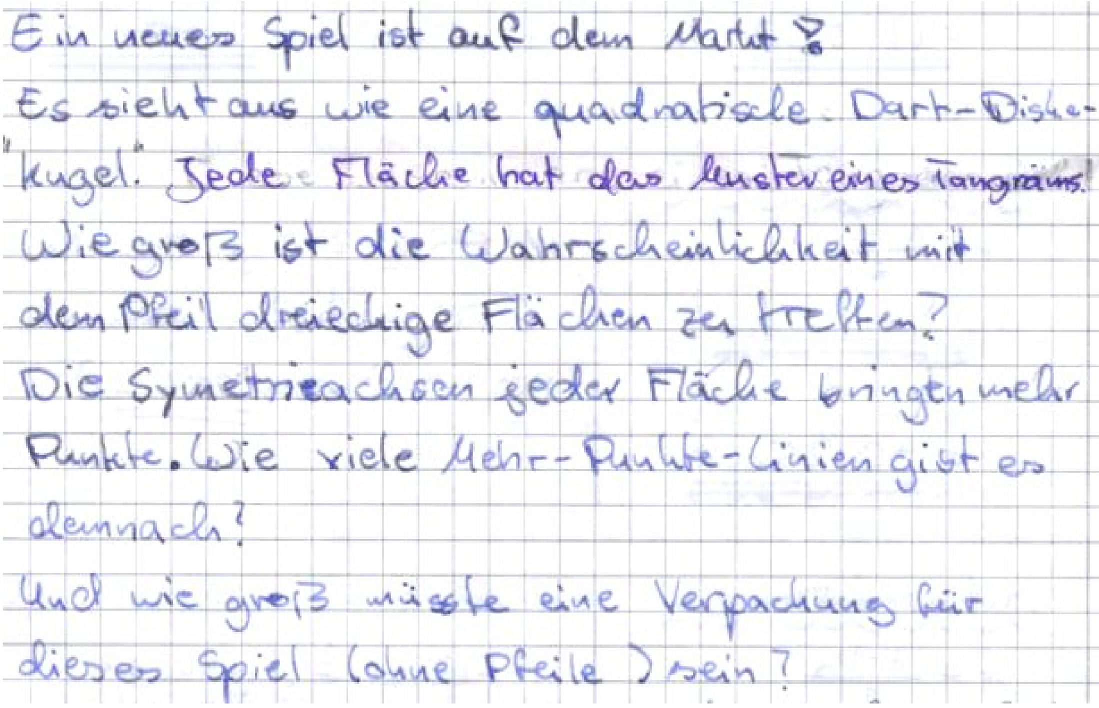
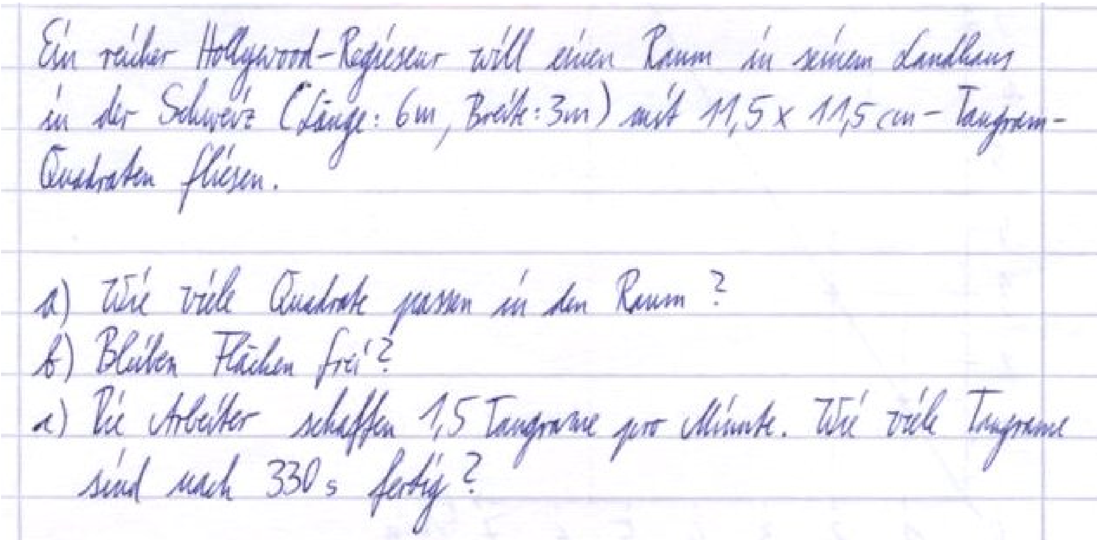

Ein neues Spiel ist auf dem Markt!
Es sieht aus wie eine quadratische "Dart-Disko-kugel". Jede Fläche hat das Muster eines Tangrams!
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit dem Pfeil dreieckige Flächen zu treffen?
Die Symetrieachsen jeder Fläche bringen mehr Punkte. Wie viele Mehr-Punkte-Linien gibt es demnach?
Und wie groß müsste eine Verpackung für dieses Spiel (ohne Pfeile) sein?

Abbildung 1.3: „Diskokugel“

hier eher überspitzt-ironisch als „authentisch“ oder „realistisch“ und gerade aus diesem Grund vielleicht sogar sinnvoll.[9]


Ein reicher Hollywood-Regisseur will einen Raum in seinem Landhaus in der Schweiz (Länge: 6m, Breite: 3m) mit 11,5 x 11,5 cm-Tangram-Quadraten fliesen.

a) Wie viele Quadrate passen in den Raum?
b) Bleiben Flächen frei?
c) Die Arbeiter schaffen 1,5 Tangrame pro Minute. Wie viele Tangrame sind nach 330 s fertig?

Abbildung 1.5: „Hollywood-Haus“

[9] Erstens ist die Frage nach dem Sinn subjektiv, zweitens ist die Schule ein beträchtlicher Teil der Schülerrealität. Ironie ist häufig eine von vielen und manchmal die einzige Möglichkeit des Subjekts, mit der Frage nach dem Sinn umzugehen, die auch in der Schule nicht fehl am Platz ist.

Die dritte Aufgabe (siehe Abb. 1.5) lässt eine ironische Interpretation noch eher zu. In einem einleitenden Text begegnet der Leser einem Hollywood-Regisseur, erhält dabei gleichzeitig die wichtigsten Maße seines „Landhauses in der Schweiz". Die darauf folgenden Teilaufgaben hängen durch den Kontext mit dem Tangram zusammen. Es wird gefragt, wie viele Tangram-Quadrate in den Raum passen und ob Flächen frei bleiben und wie viele Tangrame nach $330s$ gelegt sind. Der gewählte außermathematische Zusammenhang bezieht sich auf eine konstruierte Situation oder eine „Einkleidung", die mit mathematischen Mitteln „modelliert" oder „verkleidet" werden soll. Da auch Schupp (2002, 35) das „Einkleiden" als wichtiges heuristisches Mittel aufführt, lohnt es sich zu überprüfen, inwiefern Einkleidungen zu lokalen Vernetzungen im Unterricht beitragen können (vgl. 2.4, 3.2).

Trotz der genannten Kritikpunkte zeigen die vorgestellten Beispiele, dass die Schüler für sich sinnvolle Möglichkeiten fanden, kapitelübergreifende Bezüge herzustellen. Im ersten Fall (S. 6) wurden geometrische Phänomene wie Symmetrie mit Hilfe von Funktionsgraphen und Geradengleichungen beschrieben. In dem zweiten Fall (S. 7) wurden Oberflächeninhalte der Seiten eines Würfels als Wahrscheinlichkeitsmaße gedeutet. Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, eine Symmetrieachse zu treffen, eröffnete eine Aussicht auf anspruchsvollere mathematische Fragestellungen. Bemerkenswert ist, dass die Schüler in der dritten Aufgabe (S. 7) ein Beispiel für funktionale Abhängigkeit konstruierten und somit an Themen anknüpften, die nicht in den eingesetzten Initialaufgaben (S. 4) repräsentiert waren.

Die quadratische Tangram-Figur wurde in jeder Aufgabe unterschiedlich interpretiert. In der ersten Aufgabe (S. 6) erschien sie als eine ebene Figur, die mit Hilfe von Koordinaten und Gleichungen zu beschreiben und auf Symmetrien zu untersuchen war. In der nächsten Aufgabe (S. 7) wurde die gleiche ebene Figur in eine dreidimensionale modifiziert, deren Flächen bzw. Teilflächen und Verhältnisse zwischen ihren Inhalten als Wahrscheinlichkeitsmaße gedeutet wurden. In der dritten Aufgabe (S. 7) sollten ebene Tangram-Figuren ein Rechteck ausfüllen. Jede Interpretation führte in eine andere „kleine Welt", die die „Welt" der Schüler berührt. Bei der Wahl der Inhalte knüpften die Schüler an das ihnen aus dem Unterricht Bekannte und somit an den Rahmenlehrplan an. Nicht zuletzt aus diesem Grund schätzte der an der Erprobung beteiligte Mathematiklehrer die dafür verwendete Unterrichtszeit als effektiv genutzt ein. Er formulierte konstruktive Vorschläge zur Weiterentwicklung der erprobten Ideen und erklärte sich bereit für weitere Erprobungen (vgl. Kapitel 4).

Schülerrückmeldung

Wie die Schüler das Angebot in der beschriebenen Erprobung aufgenommen hatten, zeigt ein zwanzigminütiges Gespräch, das von dem unterrichtenden Lehrer am Ende der Erprobung veranlasst wurde. Ein Ausschnitt aus diesem Gespräch wird im Folgenden dargestellt und ausgewertet.[10]

Lehrer: *Was habt ihr von den Stunden mit dem Tangram gehalten? Wie habt ihr das empfunden, selbst Aufgaben zu erstellen?*

Ivan: *Mit der Präsentation in der Gruppe und einer Hausaufgabe waren zwei Tage zu wenig. Wir hatten Ideen, aber keine Zeit sie auszuführen. Ich hätte gern eine Woche oder so dafür gehabt.*

Lina: *Ich fand die Tangram-Geschichten interessant. Die Arbeit in der Gruppe fand ich sehr gut. Ich fand auch gut, dass wir Präsentation machen mussten, weil die MSA[11]-Prüfung naht.*

Johannes: *Tangram fand ich interessant und ich fand es sehr gut, dass man alle Kompetenzen[12] mit einem einzigen Spiel ansprechen kann.*

Oliver: *Ich hatte gerade zwei freie Tage, sonst hätte ich die Sache mit den Hausaufgaben nicht geschafft.*

Marisa: *Die Aufgaben sind pfiffig. Ich habe bei der Präsentation nicht alles verstanden. Man müsste noch mehr Ruhe für die Aufgaben haben. Es wäre aber auch schön, wenn erklärt wird, was gesucht wird.*

Thomas: *Ich fand es schön, dass man mal auch was Praktisches machen konnte. Es war auch interessant in der Gruppe zusammen zu arbeiten. Wir machen schon Gruppenarbeit, aber oft wird es nicht in Mathe gemacht, sondern in anderen Fächern.*

Karl: *Das war mal was Anderes und nicht nur Formeln runter rechnen. Der Zeitraum war zu kurz. Manche Themen waren schwer zu kombinieren.*

Andreas: *Ich fand es faszinierend. Teilweise war das schnell.*

Jonathan: *Sehr wenig Zeit. Die Aufgabe war sehr komplex.*

Timothy: *Ich stimme fast allen Kommentaren zu. Das war abwechslungsreich. Das mit der Gruppenarbeit war lustig, aber zu wenig Zeit für die Präsentation.*

Lydia: *Ich fand es gut, gerade in Mathe in Gruppen zu arbeiten. Selbst Aufgaben erstellen fand ich schwer. Das Problem war nicht, die Aufgabe zu stellen, sondern sie zu lösen.*

Ivan: *Die Gruppenarbeit fand ich toll, aber einige haben doch ein bisschen gespielt. Die Präsentation war zu schnell, man hatte keine Zeit zu verstehen. Ich brauche immer längere Zeit, um meine Kreativität entfalten zu lassen. Das hat ja auch Spaß gemacht, man wollte sich länger damit beschäftigen.*

Ivan, Lydia, Thomas, Timothy und Lina waren vor allem mit der Arbeit in der Gruppe sehr zufrieden. Lydia und Thomas fanden, dass Gruppenarbeit gerade im Mathematikunterricht wichtig ist. Thomas berichtete darüber hinaus, dass es im Mathematikunterricht

[10]Die Namen der Schüler wurden geändert.

[11]Das bedeutet Mittlerer Schulabschluss.

[12]Kurz davor fand in der Lerngruppe eine Vergleicharbeit statt, in der diese Bezeichnung verwendet wurde.

seltener als in anderen Fächern der Fall ist. Ivan wies jedoch darauf hin, dass nicht alle Schüler die Zeit während der Gruppenarbeit effektiv nutzten. Seiner Bemerkung nach verleitete das Tangram einige Schüler zum Spielen. Hiermit sprachen die Schüler die wesentlichen Probleme an, die mit der Gruppenarbeit im Mathematikunterricht zusammenhängen. Erstens geschieht es im Mathematikunterricht nach Meinung der Schüler seltener als in anderen Fächern, zweitens stellt Gruppenarbeit eine Herausforderung im Hinblick auf effektive Zeitnutzung dar.

Den Kontext des Tangrams fanden die meisten Schüler interessant und berichteten, dass sie sich gern damit beschäftigt hatten. Vor allem die Bemerkungen von Thomas und Karl geben einen Hinweis darauf, dass enaktive Unterrichtsmittel wie Modelle geometrischer Körper oder Spiele nicht Privileg des Grundschulunterrichts sein müssen. Sie würden gern etwas mit ihren Händen tun und nicht nur mit Formeln rechnen. Faszinierend fanden es die Schüler auch, dass sich so viele Themen aus dem Unterricht mit dem Tangram verbinden lassen.

Eine kritische Bemerkung von Marisa zeigt, dass die Fragestellungen der Initialaufgaben aus der Sicht der Schüler nicht immer verständlich formuliert waren. Fast alle Schüler hätten sich mehr Zeit für die Präsentationen der Initialaufgaben gewünscht. Viele Schüler hätten gern mehr Zeit für die Entwicklung eigener Aufgaben gehabt und waren motiviert sich damit zu beschäftigen, auch wenn sie die Anforderungen als komplex empfanden.

Die positiven Äußerungen der Schüler hinsichtlich eines gemeinsamen Kontextes der Initialaufgaben und der Gruppenarbeit im Mathematikunterricht geben Grund zur Annahme, dass diese zur Entstehung von „lokalen Vernetzungen“ zwischen mathematischen Gebieten beitragen könnten. Ihre kritischen Bemerkungen zur effektiven Gestaltung der Gruppenarbeitsphasen und damit verbundene Ansprüche an die Formulierungen der Initialaufgaben geben Ansatzpunkte zum gründlichen Nachdenken über theoretische und praktische Aspekte von „lokalen Vernetzungen“. Daraus resultiert die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit.

1.3 Zielsetzung der Arbeit: Konstruktion der *Aufgabennetze*

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht im Untersuchen von Beziehungshaltigkeit und Vernetzungen im Mathematikunterricht. Nach Ladentin (2010, 87) hat Immanuel Kant das Nachdenken als Aufgabenstellung der Philosophie durch drei Fragen bestimmt: Was kann ich wissen? Was soll ich tun? Und: Was darf ich hoffen? Diese drei Fragen werden in der vorliegenden Arbeit unter der Voraussetzung eines besonderen Verhältnisses gestellt. Dieses besteht darin, dass der eine den anderen zu etwas anleiten will, was dieser nur selbst tun kann. Angemessenes didaktisch-pädagogisches Handeln setzt dieses paradoxe Verhältnis voraus (Ladentin 2010, 88f.).

Was kann man als Lehrer über Beziehungshaltigkeit wissen? Wie kann man als Lehrer handeln, so dass die Schüler Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten erkennen bzw. selbständig herstellen? Um handeln zu können, muss man die Wirklichkeit oder die Praxis (bzw. Empirie) kennen, in der man handelt. Ob eine empirische Untersuchung didaktisch oder pädagogisch aussagekräftig ist, lässt sich jedoch nicht aus ihr selbst ableiten. Eine praxisorientierte oder empirische Untersuchung setzt vielmehr eine Auseinandersetzung mit den theoretischen Prinzipien voraus. Dabei kann einem Streit über richtige theoretische Begrifflichkeiten nicht ausgewichen werden. Das Nachdenken über Beziehungshaltigkeit und Vernetzungen in einem didaktisch-pädagogischen Kontext verbindet somit Empirie, prinzipiengeleitetes Denken und Reflexion. Diese Verbindung geschieht in der vorliegenden Arbeit durch Konstruktion von *Aufgabennetzen* als speziellen Lernumgebungen, die in der Zusammenarbeit mit Lehrern und Schülern entstehen und Theorie und Praxis miteinander verknüpfen.

1.4 Leitfragen

Bei der Entwicklung von *Aufgabennetzen* stellen sich folgende Fragen, die den Forschungsprozess leiten und begleiten:

1. Warum sind innermathematische Beziehungshaltigkeit bzw. Vernetzungen in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht von Bedeutung?

2. Was wird unter *Vernetzung* in der Mathematikdidaktik verstanden?

3. Welche älteren theoretischen Ansätze gibt es in der Mathematikdidaktik, die sich mit der Problematik der kapitelübergreifenden Aufgabenstellungen beschäftigen?

4. Was ist das Potenzial und was sind die Grenzen des Begriffes Vernetzung im Hinblick auf theoretische Konsistenz und praktische Umsetzbarkeit der didaktischen Vorschläge?

5. Welche Arten von Vernetzungen kann es im Mathematikunterricht geben?

6. Welche Hinweise und Vermutungen über die Problematik der Vernetzungen liefern Exkurse in die Philosophie und die Soziologie der Mathematik?[13]

[13] Ergebnisse aus der Psychologie wurden bereits durch die Arbeiten anderer Didaktiker (Vollrath, Brinkmann) einbezogen.

7. Wie kann die Lerngruppe als soziales Phänomen produktiv bei der Entstehung von kapitelübergreifenden Bezügen berücksichtigt werden?

8. Welche mathematischen Probleme oder Kontexte eignen sich am besten zum Herstellen von kapitelübergreifenden Bezügen?

9. Wie müssen *Aufgabennetze* gestaltet sein, um vernetzendes Denken der Schüler zu fördern?

1.5 Methodische Überlegungen

Aus der Zielsetzung der Arbeit und den damit verbundenen Leitfragen ergibt sich die Notwendigkeit, theoretische und praxis-reflexive Forschungsmethoden zu kombinieren. Nach Macke sind praxisbezogene Forschungsmethoden

> *„[...] gerade dadurch gekennzeichnet, dass bei primärer Orientierung auf eine Praxis im methodischen Handeln verschiedene methodische Zugriffsweisen gebündelt werden, um auf diese Weise Ziele wie Praxisverbesserung, Materialienentwicklung für die Praxis oder Entwicklung von Konzepten zur Anleitung praktischen Handelns zu realisieren.“*(Macke 1990, 65)

So werden bei der Auseinandersetzung mit den fachdidaktischen Texten didaktische Vorschläge rekonstruiert, interpretiert, bewertet und im Hinblick auf die schulische Praxis gewürdigt (Macke 1990, 65). In den Texten enthaltene didaktisch-pädagogische Begriffe werden dabei vor allem als Metaphern betrachtet, mit dem Ziel, Berührungspunkte zwischen verschiedenen Ansätzen zu finden und diese zunächst auf einer theoretischen Ebene zu reflektieren (vgl. 1.5.1). Auf der anderen Seite sollen Metaphern die Verschränkung von Theorie und Praxis erleichtern und den Übergang von theoretischen Überlegungen zu praktischen Vorschlägen unterstützen (vgl. 1.5.1). Diese Vorschläge werden dann in der schulischen Praxis erprobt und weiterentwickelt (vgl. 1.5.2).

1.5.1 Metaphern als Analyse- und Konstruktionswerkzeug

In den neueren Arbeiten zum Thema Vernetzungen im Mathematikunterricht (Brinkmann 2002, 34, Hischer 2010a, 107) werden mathematische Objekte, Mathematiker oder auch Schüler als „Knoten in Netzen oder Netzwerken“ graphentheoretisch erfasst.[14] Derartige graphentheoretische Modelle weisen (wie nicht-mathematisierte theoretische Konstrukte auch) metaphorische Aspekte auf. Diese sollen in der vorliegenden Arbeit anhand ausgewählter Texte bewusst gemacht und im Anschluss an Ergebnisse von Guski (2007).

[14] Um das sprachlich-konstruktive Potenzial von Mathematik zu betonen, bezeichnet Führer (1998, 506) „Mathematisierungen“ als „Metaphorisierungen“ (siehe auch 2.1.2).

Guski deutet sprachliche Metaphern als verbale Entsprechungen von kognitiven Vorstellungen. Demnach verbergen sich hinter den metaphorischen Ausdrücken kognitive Bilder von sogenannten konzeptuellen Metaphern. Darunter werden systematische Verbindungen zweier konzeptueller Bilddomänen verstanden. Dabei tritt die eine Domäne als Zielbereich und die andere als Ursprungsbereich auf. In diesem Sinne wird beispielsweise „Lernen“ (aus dem Zielbereich) häufig mit dem „Vorwärtskommen“ (aus dem Ursprungsbereich) metaphorisiert (vgl. Guski 2007, 51, 58).

Metaphorische Konzepte bieten zum einen verschiedene Anknüpfungspunkte an die älteren und neueren didaktischen Vorschläge. Sie beschreiben zum anderen das Phänomen der Beziehungshaltigkeit in seiner scheinbaren Widersprüchlichkeit plasti- scher als beispielsweise quantitative Netzwerkanalysen, auch wenn sie auf den ersten Blick weniger präzise erscheinen. Metaphern ermöglichen nicht nur das Aufstellen von Vermutungen über ihnen zugrunde liegende Konzepte, sondern eine Einordnung von didaktischen Vorschlägen in einen historischen Kontext (vgl. Guski 2007, 23).

Bei den Vernetzungen und der Beziehungshaltigkeit, wie sie bei Freudenthal (1979) und in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik vertreten sind, handelt es sich um komplexe Phänomene, zu deren Beschreibung mehrere metaphorische Konzepte erforderlich sind. Der Begriff oder die Metapher des Netzes allein reicht hier nicht aus. Deshalb muss sowohl bei der Konstruktion wie bei der Umsetzung der Aufgabennetze auf weitere metaphorische Konzepte zurückgegriffen werden. Deshalb sollen Metaphern wie beispielsweise Haus, Baum, Themenkreise, Übersetzungen (z.B. aus der Sprache der Algebra in die Sprache der Geometrie) zur Analyse der Problematik und Konstruktion von Lösungsvorschlägen heranzogen werden. Die Metapher des Netzes als sprachlich-konstruktives Werkzeug steht dabei im Zentrum.

1.5.2 Schulische Erprobungen als methodischer Zugang

Da die *Aufgabennetze* im Austausch mit Lehrern, Lehramtsstudierenden und Schülern entstanden sind, vermitteln sie zwischen dem professionellen Wissen der Lehrer und dem Wissen der Lehramtsstudierenden und zwischen den Bedürfnissen der Schüler und der universitären Mathematikdidaktik. Sie werden im Wechsel zwischen schulischen Erprobungen und theoretischen Reflexionen konstruiert (vgl. Wittmann 1995, 355ff.).

Das Ziel der *Aufgabennetze* als Lernumgebungen ist die Wiederholung und Vernetzung der Inhalte im Mathematikunterricht. Sie werden einerseits mit Hilfe theoretischer Überlegungen konstruiert, begründet und reflektiert. Andererseits bieten sie Ausgangspunkte zum Hinterfragen theoretische Prinzipien und deuten Grenzen der Begrifflichkeiten an.[15]

[15] So stellte sich beispielsweise bei der in 2.5 beschriebenen Erprobung heraus, dass das von Brinkmann aufgestellte Kategoriensystem erweitert werden muss, um die Ergebnisse der Schüler entsprechend zu beschreiben.

Dabei können sie den Streit um die Begriffe nicht beilegen, weil Empirie theoretische Begriffe und Prinzipien weder bestätigen, noch widerlegen kann. Sie bestätigt höchstens das, was vorab vorausgesetzt wurde, und gibt Auskunft innerhalb theoretischer Modelle. Insofern handelt es sich bei den schulischen Erprobungen in der vorliegenden Arbeit eher um Anwendungen oder Illustrationen von theoretischen Überlegungen (vgl. Ladentin 2010, 93f.).

Die exemplarische Auswahl an Lösungen und Aufgaben, die die Schüler im Laufe der Erprobungen produziert haben, deutet an, was ein Lehrer, der über Vernetzung etwas weiß und dafür etwas tut, von den Ergebnissen erhoffen darf. Der Grund dafür besteht darin, dass die Schüler zum Herstellen von Vernetzungen angeleitet werden sollen, die sie nur selbst herstellen können. Ob die Schüler etwas verstehen, einsehen oder vernetzen ist weder messbar, noch beobachtbar. Insofern können aus den vorgestellten Schülerprodukten nur vorsichtige Vermutungen abgeleitet werden, die als Handlungsprinzipien didaktisch-pädagogische Hoffnungen wecken können oder auch nicht.

1.6 Der Aufbau der Arbeit

Im Sinne der oben dargestellten Überlegungen ist die vorliegende Arbeit aufgebaut. Dabei wird ein Versuch unternommen, die klassische Aufteilung zwischen Theorie und Empirie bzw. Praxis des Mathematikunterrichts aufzubrechen, um eine Verzahnung zwischen diesen zu verstärken.

Im Kapitel 1 werden die erste Erprobung und die daraus abgeleitete Idee der *Aufgabennetze* vorgestellt. Die Konstruktion dieser *Aufgabennetze* im Wechsel von Theorie und Praxis wird als zentrale Zielsetzung der vorliegenden Arbeit präzisiert. Ausgehend davon wurden in der Einleitung Leitfragen formuliert, die methodischen Vorgehensweisen gewählt sowie der Aufbau der Arbeit vorgestellt.

Kapitel 2 wird durch die Leitfrage 1 (1.4) eingeleitet. Gleichzeitig wird eine Beschäftigung mit innermathematischer Beziehungshaltigkeit aus pädagogischer und didaktischer Sicht angeregt. Danach werden die Leitfragen 2, 3, 4 und 5 behandelt. Dafür wird ein Überblick über Beziehungshaltigkeit und über Vernetzungen im Mathematikunterricht und die damit verbundenen Begriffen gegeben. Dabei wird zuerst auf ältere theoretische Ansätze und dann auf aktuelle Begrifflichkeiten eingegangen, um den Begriffswandel im Laufe der Zeit zu verfolgen und in die jeweiligen pädagogisch-historischen Kontexte einzuordnen. Daraus werden Begrifflichkeiten und Prinzipien für die aktuelle Unterrichtspraxis abgeleitet. Diese Prinzipien sollen Möglichkeiten andeuten, mit den in den vorigen Abschnitten thematisierten Fragen in der Praxis umzugehen. Schließlich werden sie bei der Konstruktion und schulischen Erprobung des Aufgabennetzes „Tangram“ angewandt. Daraus lassen sich Hinweise für die Weiterentwicklung von Begrifflichkeiten und Handlungs- bzw. Gestaltungsprinzipien ableiten.

Im Kapitel 3 werden aktuelle Ansätze zu Vernetzungen im Mathematikunterricht miteinander kombiniert, das Kategoriensystem weiterentwickelt und um die soziale Ebene ergänzt. Das Letztere geschieht durch einen Exkurs zu den philosophischen und soziologischen Aspekten der Mathematik. So wird in Kapitel 3 einerseits die Beschäftigung mit den bereits in Kapitel 2 diskutierten Fragen vertieft, aber auch um die Leitfragen 5, 6 und 7 erweitert.

Anschließend werden im Kapitel 4 die Leitfragen 8 und 9 durch Entwicklung und Erprobung von konkreten Aufgabennetzen („Pythagorasbaum“ und „Rund ums Sechseck“) exemplarisch bearbeitet.

Schließlich werden im Kapitel 5 Ergebnisse der Untersuchung zusammengefasst und ihre Relevanz für Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts eingeschätzt und ein Ausblick auf Möglichkeiten der anschließenden Forschung gegeben.

2 *Beziehungshaltigkeit* und *Vernetzungen* als pädagogisch-didaktische Theoriekontexte der *Aufgabennetze*

Die Überlegungen des vorliegenden Kapitels beziehen sich auf einen Teil der im 1. Kapitel formulierten Leitfragen:

- Was wird unter *Vernetzung* in der Mathematikdidaktik verstanden?
- Warum sind Vernetzungen in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht von Bedeutung?
- Was ist das Potenzial und was sind die Grenzen des Begriffes Vernetzung im Hinblick auf theoretische Konsistenz und praktische Umsetzbarkeit der didaktischen Vorschläge?
- Welche älteren theoretischen Ansätze gibt es in der Mathematikdidaktik, die sich mit der Problematik der kapitelübergreifenden Aufgabenstellungen im Mathematikunterricht beschäftigen?
- Welche Arten von Vernetzungen kann es im Mathematikunterricht geben?

Eine Klärung der Frage nach dem Potenzial und den Grenzen des Begriffes „Vernetzung“ führt zu einer Suche nach Alternativen und älteren Ansätzen in der Didaktik der Mathematik. So ein Ansatz ist beispielsweise unter der Überschrift „Beziehungshaltigkeit“[1] zu finden. Da sowohl „Beziehungshaltigkeit“ als auch „Vernetzung“ als Ziele des allgemeinbildendes Mathematikunterrichts formuliert wurden, werden in 2.1 einige Vorbetrachtungen zu Konzeptionen der Allgemeinbildung vorausgeschickt. Anschließend werden in 2.2 exemplarisch ausgewählte mathematikdidaktische Ansätze zur Problematik der Beziehungshaltigkeit dargestellt. In 2.3 folgen vergleichende Betrachtungen der Konzepte von Vernetzungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Die Ergebnisse aus 2.2 und 2.3 werden in 2.4 zusammengefasst und mit methodischen Überlegungen ergänzt. Dabei soll und kann kein lückenloser Überblick über alle damit

[1] Die Bezeichnung *Beziehungshaltigkeit* kommt zum ersten Mal bei Freudenthal (1973) vor.

verbundenen Fragen gegeben werden, vielmehr werden anhand einer repräsentativen Auswahl von Beispielen Unterschiede in Positionen differenziert dargestellt. Entsprechend den verschiedenen Schwerpunkten der vorgestellten Ansätze werden unterschiedliche, sich ergänzende Blickwinkel für die Gestaltungsprinzipien der Aufgabennetze eröffnet. Die Darstellung erfolgt chronologisch und ist ein Versuch, die Begriffswandlungen samt den Akzentverschiebungen im Laufe der Zeit zu verfolgen und diese zu beschreiben. Die Ergebnisse werden mit der Darstellung einer schulischen Erprobung in 2.5 abgerundet, um einerseits die ausgearbeiteten theoretischen Überlegungen zu illustrieren und andererseits ihre Grenzen aufzuzeigen.

2.1 Bildungstheoretischer Hintergrund

Die Blickwinkel aus der allgemeinen Pädagogik deuten in 2.1.1 Möglichkeiten für die Einordnung, Interpretation und Reflexion der Beziehungshaltigkeit als ein Bildungs- und Unterrichtsziel an. Anschließend werden in 2.1.2 mathematikdidaktische Konzeptionen von Allgemeinbildung vorgestellt.

2.1.1 Blickwinkel aus der allgemeinen Pädagogik

Im Hinblick auf den Begriff der Bildung wurden hier vier Ansatzpunkte aus der allgemeinen Pädagogik gewählt. Das sind zunächst in der Bibel angedeutete Auffassungen von Bildung, Ideen Wilhelm von Humboldts, die im humanistischen Kontext auf die Antike zurückblicken, und mit Vorschlägen von Klafki (2007) und Tenorth (2006a) zwei zeitgenössische Möglichkeiten, Bildung zu deuten. Die Auswahl dieser begründet sich einerseits durch die historische Entwicklung des Begriffes, andererseits durch Hinweise in den rechtlichen Grundlagen für schulische Bildung und Erziehung im deutschsprachigen Raum. In dem Sinne können die vier Ansatzpunkte als aktuell anerkannte und im deutschsprachigen Raum verwendete Möglichkeiten, pädagogischen Zielsetzungen zu begründen, gedeutet werden. Dies wird im Folgenden am Beispiel des Berliner Schulgesetzes (2004) gezeigt. Hier werden die zum Ausgangspunkt gewählten Perspektiven als Ideen, die die Entstehung der heutigen Gesellschaft und somit der Schule als einer gesellschaftlichen Institution bedeutsam beeinflussten, betrachtet:

> *„Dabei sollen die Antike, das Christentum und die für die Entwicklung zum Humanismus, zur Freiheit und zur Demokratie wesentlichen gesellschaftlichen Bewegungen ihren Platz finden.“* (Das Schulgesetz für das Land Berlin vom 26. Januar 2004, § 1)

Werden die vorgestellten Konzeptionen geschichtlich betrachtet, so erlauben sie das Aufstellen von Vermutungen über den bildungshistorischen Kontext der didaktischen Ansätze. Werden die gleichen Perspektiven als aktuelle Begründungmöglichkeiten angesehen, so können sie als „Orientierungshilfen“ und „kognitive und moralische Bereitschaften und Fähigkeiten“ in den „Unsicherheiten“ des Konstruktionsprozesses im Sinne von Tenorth (2006a, 23) dienen.

„Bildung“ gehört nach Mietzner (2005, 1) zu den spezifisch deutschen Begriffen, die unter dem Einfluss des Christentums geprägt wurden. Der Begriff verweist demnach historisch auf „Bilden, einer Sache Gestalt geben, Gottesebenbildlichkeit“ (2005, 1). In diesem Sinne macht die Sprache den Menschen zu einem Wesen, das die ihm anvertraute Schöpfung oder die Welt mit Hilfe seiner Sprache beschreiben, gestalten und auch verantworten kann. Die Sprache befähigt den Menschen zum schöpferischen Tun (vgl. 1. Mose 1, 27, Kolosser 3, 10[2]).[3]

Bei Wilhelm von Humboldt[4] erhielt der Bildungsbegriff einen neuen Wertbezug und somit eine neue (oder im Rückblick auf die Antike erneuerte) Zentrierung. Im Mittelpunkt des Bildungsprozesses steht für Wilhelm von Humboldt nicht mehr Gott, sondern der Mensch und die Welt. Im Hinblick auf die Bildung des Einzelnen bzw. der Gattung in einer konkreten Gesellschaft formuliert Humboldt, wie er selbst bemerkt, einen „überspannten Gedanken“, der ihm zufolge dazu noch „schwer verständlich auszudrücken ist“. Dieser besteht darin, dass Bildung als „Aufgabe allein durch die Verknüpfung unseres Ichs mit der Welt zu einer allgemeinsten, regesten und freiesten Wechselwirkung“ zu lösen wäre (Humboldt 1793, 22). Die Verknüpfung von Welt und Individuum bewirkt für Humboldt die menschliche Sprache als

> *„[...] Mittel, durch welches der Mensch zugleich sich selbst und die Welt bildet oder vielmehr seiner dadurch bewusst wird, dass er eine Welt von sich abscheidet.“* (Humboldt 1800, 206f.)

Für Humboldt schlagen sich in den einzelnen Sprachen jeweilige Interpretationen der Welt nieder, die nur durch diese Sprache zugänglich sind und nicht in anderen Sprachen thematisiert werden können. Demzufolge kann die Welt nur durch Konfrontation mit verschiedenen Sprachen und Zugängen in ihrer Vielschichtigkeit erfahren werden (vgl. Humboldt 1793, 75ff.). Durch die Sprache bzw. Sprachen bildet sich der Mensch und erschafft seine Welt. Dabei bietet die Vielfalt der Sprachen einerseits Chancen für Bildung, indem sie unterschiedliche Sichtweisen auf die Welt eröffnet, andererseits setzt sie dem Verstehen Grenzen (vgl. Koller 2003, 522ff.). Mit den Worten Wilhelm von Humboldts:

> *„Keiner denkt bei dem Wort genau und gerade das, was der andere, und die noch so kleine Verschiedenheit zittert, wie ein Kreis im Wasser, durch die ganze Sprache fort.*

[2]Hierbei handelt es sich um Bibelstellen nach der deutschen Übersetzung Luthers (vgl. Ev.-Bibelgesellschaft/Rußland 1890)

[3]Der bereits im Alten Testament angedeutete Gedanke des konstruktiven Potenzials menschlicher Sprachlichkeit im Bildungsprozess erscheint vermutlich ohne expliziten Rückbezug auf das Christentum bei Bruner, Wigotzki, Piaget und vielen anderen in Deutschland rezipierten Autoren. So beschreibt beispielsweise Winter den Menschen in seinen Reflexionen über die Ziele des Mathematikunterrichts vor allem als schöpferisches und sprachliches Wesen, das seine Welt selbst gestaltet (vgl. Winter 1975, 106ff.).

[4]Hierbei werden vor allem die von Menze (1965) herausgegebenen Origninaltexte Humboldts gemeint.

> *Alles Verstehen ist daher immer zugleich ein Nicht-Verstehen, alle Übereinstimmung in Gedanken und Gefühlen zugleich ein Auseinandergehen."* (Humboldt 1830-1835, 439, zitiert in Koller 2003, 527)

Demnach bestünde das Verstehen nicht lediglich darin, Übereinstimmungen (oder Kohärenzen) herzustellen, sondern vielmehr im Umgang mit den Unterschieden (oder Kohärenzen) (vgl. Koller 2003, 527, Vohns 2010, 245).[5]

Auch wenn die Auffassungen von Humboldt mit seinen Wertbezügen sich bildungspolitisch an seiner Epoche orientiert (vgl. Lenné 1969, 202), liefert sie ideengeschichtlich Ansatzpunkte zur Reflexion aktueller mathematikdidaktischer Ansätzen zum allgemeinbildenden Mathematikunterricht. Die Idee von Bildung als einer Verknüpfung des Menschen und der Welt findet sich in den neueren Arbeiten der allgemeinen Pädagogik im Zusammenhang mit dem „vernetzenden Denken" wieder (vgl. Klafki 2007, 63). In den Arbeiten von Klafki zählen die Bereitschaft und Fähigkeit zum „vernetzenden Denken" zu den Hauptaspekten der Allgemeinbildung. Diese wird im Kontext „der die Menschen gemeinsam angehenden Frage- und Problemstellungen ihrer geschichtlich gewordenen Gegenwart und der sich abzeichnenden Zukunft" verstanden (Klafki 2007, 53). Die Betonung des „vernetzendes Denkens" kommt dabei Klafki zufolge aus

> *„... neueren Zeit- und Gesellschaftsanalysen, die jene vielfältige Verflechtungen herausgearbeitet haben, die heute im Zeitalter hochentwickelter Technik und ihrer möglichen Folgen sowie der damit verbundenen politischen und ökonomischen Wirkungszusammenhängen – zugespitzt formuliert – ‚alles mit allem' verknüpfen."* (Klafki 2007, 63ff.)[6]

Das Unterstreichen von „vernetzendem Denken" kommt zustande, um zu starre Fixierungen auf sogenannte Schlüsselprobleme als „alle Menschen gemeinsam angehende Frage- und Problemstellungen" zu vermeiden (Klafki 2007, 63).

Für Tenorth (2006a, 14ff.) definiert sich „das Bild der Gebildeten neuer Zeit" aus der Metaphorik des „privaten Unternehmers unserer eigener Person" und dem Blick auf das Individuum als Gestalter seiner Lebensgeschichte (vgl. Tenorth 2006a, 23).

> *„Dieses Bild ist bestimmt von dem Zwang, mit Unsicherheit umgehen zu müssen, die Biographie selbst zu fügen, aber dafür in den moralischen und kognitiven Bereitschaften und Kompetenzen die Orientierung zu finden, die den Umgang mit Unsicherheit möglich machen, bereit auch, um- und neu zu lernen."* (Tenorth 2006a, 23)

[5] In diesem Sinne erlaubt Humboldts Hervorhebung der Unterschiede, Mathematik als Sprache nicht nur als eine Ergänzung des eigenen Weltbildes zu begreifen, sondern bietet dabei auch die Möglichkeit, einen Konflikt zwischen der Mathematik und der Welt außerhalb von ihr zu betrachten.

[6] Die Ansicht Klafkis beinhaltet die Annahme, dass die Welt durch technische Entwicklung komplexer geworden ist. Allerdings ist es kaum möglich, die Komplexität der Vergangenheit aus der Perspektive der Gegenwart rückblickend zu beurteilen.

In diesem Sinne interpretiert Tenorth die Persönlichkeit eines Menschen zugleich als Voraussetzung und als Ziel der Bildungsprozesse.[7] Diese Auffassung greift einerseits historisch betrachtete Möglichkeiten Bildung zu denken auf, versperrt aber auch nicht den Weg zu einer Auseinandersetzung mit den neueren Modellen mit ihrer an die Sprache der Wirtschaft angelehnten Metaphorik (vgl. Guski 2007, 445ff.).

Andererseits stellen Tenorths Gedanken zur Bildung den Mathematikunterricht in ein anderes Licht: Sie werfen die alten Fragen nach kognitiven und moralischen Orientierungen im Umgang mit Unsicherheiten, die Mathematik bieten kann, neu auf. Gleichzeitig rücken sie die Bereitschaften das „Gelernte" oder das bereits „Vernetzte" um- bzw. neu zu denken, auch im Mathematikunterricht in den Mittelpunkt.

Ein Vergleich von vier unterschiedlichen Blickwinkel erlaubt folgende Feststellungen: Während in der Bibel die Ähnlichkeit mit Gott sowohl der Ausgangpunkt wie auch das Ziel des Bildungsprozesses ist, steht bei Humboldt die Welt und ihre Vervollkommnung durch den Menschen im Mittelpunkt. Gemeinsam ist den Vorstellungen von Humboldt und den christlichen Auffassungen die ausschlaggebende Bedeutung der menschlichen Sprache im Bildungsprozess. Sprache beeinflusst demnach die Wahrnehmung und hat das Potenzial, die Welt zu gestalten. Humboldt betrachtet darüber hinaus verschiedene Sprachen als verschiedene Sichtweisen auf die Welt und sieht darin besondere Chancen für Bildung, aber auch ihre Grenzen. Klafki möchte, dass die Schüler in der Lage sind, komplexe gesellschaftliche Zusammenhänge zu erkennen. Somit wird Vernetzungsfähigkeit bzw. Vernetzungsbereitschaft bei Klafki zum fächerübergreifenden Ziel der Allgemeinbildung. Tenorth betont im Bildungsprozess die Bereitschaften einer Person umzudenken oder neu zu denken. Das kann bedeuten, dass hergestellte Vernetzungen nicht nur hinterfragt, sondern auch verworfen werden können.

Den christlich geprägten Auffassungen, den Ideen Wilhelm von Humboldts und den Denkmöglichkeiten von Tenorth ist gemeinsam, dass je nachdem „Gottesebenbildlichkeit", „Sprachlichkeit" oder „Persönlichkeit" eines Menschen nicht nur als Ziele, sondern vielmehr als Voraussetzungen aller Bildungsprozesse betrachtet werden. In diesem Sinne können nur Vernetzungen bestehen, die die Persönlichkeit des Schülers respektieren und zu ihrer Entwicklung beitragen.

Somit bietet der aktuelle Begriff „Vernetzung" verschiedene Anknüpfungspunkte an ältere und neuere Ansätze aus der Bildungstheorie, verkörpert aber auch die Gefahren, die neuere Tendenzen mit sich bringen. Damit ist einerseits Beliebigkeit (z.B. „alles mit allem vernetzen" bei Klafki), andererseits unangemessene Verengung von didaktischen

[7] Diese finden nicht nur in der Schule und manchmal sogar trotz der Schule statt, wie beispielweise die Auseinandersetzung mit der Schule in der Zeit des Nationalsozialismus zeigten (vgl. Tenorth 2006a, 17, Hentig 2007, 104ff.).

Begriffen wie beispielsweise „Kompetenz“, „Modellierung“ gemeint (vgl. Hischer 2010, 4, Filler und Nordheimer 2011, 36).

Akzentverschiebungen in Positionen und begriffliche Veränderungen machen eine Konsistenz bildungstheoretischer Bezüge zu einer Illusion. Dennoch lassen sich bestimmte Berührungspunkte zwischen verschiedenen Ideen herausarbeiten. Ausgehend von diesen lassen sich Anregungen in Form von Fragen formulieren:

- *Könnte Mathematik als eine „Sprache“ aufgefasst werden, die einen besonderen Zugang zur Welt sowie besondere kreative Gestaltungsmöglichkeiten erlaubt?*

- *Könnten verschiedene Bereiche der Mathematik (z. B. Algebra und Geometrie) als verschiedene mathematische „Sprachen“ oder Perspektiven verstanden werden?*

- *Wie kann „vernetzendes Denken“ sowie die Fähigkeit „umzudenken“ im Mathematikunterricht gefördert werden?*

2.1.2 Mathematikdidaktische Blickwinkel

Hinter pädagogischen Konzeptionen stehen bestimmte philosophische Grundannahmen als implizite oder explizite Welt- und Menschenbilder sowie andere Wertbezüge. Diese können nur selten innerhalb der Pädagogik begründet und somit nur bedingt hinterfragt werden. Genauso stehen hinter den Modellen der mathematischen Allgemeinbildung bestimmte Annahmen über Mathematik, die innerhalb der Didaktik weder legitimiert noch falsifiziert werden können. Innerhalb der Didaktik können sie dennoch in einem gewissen Maße offengelegt werden. Das Ziel einer derartigen Explikation kann beispielsweise das Entdecken von Berührungspunkten zwischen verschiedenen theoretischen Ansätzen sein. Metaphorisch können derartige Berührungspunkte als Knoten im Netzwerk von Theorien beschrieben werden (vgl. Popper 1971, 31).

Eine weiterreichende Reflexion derartiger Grundannahmen und insbesondere der jeweiligen Bilder von Mathematik besteht durch schulpraktische, mit anderen Worten empirische, Erprobungen der daraus abgeleiteten Unterrichtsvorschläge (vgl. 2.5, 4). Insofern können die hier vorgestellten Modelle erst am Ende der Arbeit tiefgründiger hinterfragt werden. An dieser Stelle der Arbeit geht es deshalb zunächst darum, ausgewählte Modelle des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts exemplarisch als Grundannahmen zu untersuchen und auf Widersprüche und gegenseitige Verträglichkeit zu prüfen.

Dabei ist es wichtig festzuhalten, dass es sich in den Texten zum allgemeinbildenden Mathematikunterricht größtenteils um Entwürfe einer „idealen“ Wirklichkeit des Mathematikunterrichts bzw. Visionen handelt, die auf programmatische Art vorgestellt werden. Metaphern bilden dabei die sprachlich-kognitiven Werkzeuge, um sowohl Mathematik als auch Mathematikunterricht zu beschreiben, Handlungsanweisungen daraus abzuleiten und zu begründen. Auch die vorliegenden Analysen untersuchen somit nicht die Wirklichkeit des Mathematikunterrichts, sondern das jeweilige Nachdenken und Sprechen über Allgemeinbildung und Beziehungshaltigkeit im Mathematikunterricht (vgl. Guski 2007, 32ff.).

Für Baptist und Winter (2001, 61) besteht die Aufgabe des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts darin, den Schülern folgende drei Grunderfahrungen zu ermöglichen:

1. *Mathematik als ein von Menschen gemachtes Universum abstrakter (und deshalb auch „ewiger") Objekte mit einem Höchstmaß an innerer (deduktiver) Vernetzung und Offenheit gegenüber Neuschöpfungen und neuen Ordnungen und Beziehungen;*
2. *Mathematik als Reservoir an Modellen, d.h. an begrifflichen Konstruktionen, die geeignet sind, auf rationale Art zu interpretieren (deskriptive Modelle) oder das Verfolgen von Zwecken systematisch zu organisieren (normative Modelle);*
3. *Mathematik als ideales Übungsfeld für heuristisches und analytisches Denken, das die alltägliche Denkpraxis aufgreift und in spezifischer Weise hochstilisiert.*

Wie lassen sich diese Grunderfahrungen im Lichte der vorgestellten bildungstheoretischen Aspekte sehen? Inwiefern kann beispielsweise die in den Grunderfahrungen von Winter implizierte Mathematik als eine Art von Sprache oder sogar Sprachen interpretiert werden? Maier und Schweiger (1999, 19) beschreiben die Mathematik, indem sie Sprache unter folgenden Aspekten betrachten:

- *(kreative) Tätigkeit;*
- *(erlernte) Technik (Dynamis[8]);*
- *Produkt (Gesprochenes, Geschriebenes, Texte).*

Diese Aspekte der Mathematik als Sprache lassen sich beispielsweise bei Freudenthal (1963, 11f.) finden:

> *„Worte wie ‚Sprache' und ‚Mathematik' haben eine Doppelbedeutung. Sie können eine Tätigkeit bezeichnen, aber auch Resultat dieser Tätigkeit."*

Mathematik kann als „kreative Tätigkeit" durch ihre Offenheit gegenüber „Neuschöpfungen und neuen Ordnungen" und neuen „begrifflichen Konstruktionen" interpretiert werden. Als „Universum abstrakter Objekte" mit einem „Höchstmaß an innerer (deduktiver) Vernetzung" ist sie nach Baptist und Winter von Menschen gemacht. In diesem Sinne kann Mathematik universell, historisch und individuell als Produkt menschlicher Tätigkeit interpretiert werden. Mathematik als zu erlernende Fähigkeit oder Technik kommt vor allem in Mathematik als „ideales Übungsfeld für heuristisches und analytisches Denken" zum Ausdruck.

[8]Im Griechischen steht Dynamis für Kraft, Vermögen oder Fähigkeit.

Die Welt (sei es die „mathematische“ oder die „nicht-mathematische“ Welt) und das Individuum werden durch die Sprache der Mathematik im Sinne Wilhelm von Humboldts miteinander verknüpft, indem bestimmte Zusammenhänge bzw. Vernetzungen besonders prägnant mathematisch ausgedrückt werden. Dabei darf jedoch nicht vergessen werden, dass bestimmte Zusammenhänge in der Sprache der Mathematik ausgeblendet werden bzw. gar nicht darstellbar sind. So behauptet beispielsweise Führer (2002, 73ff.), dass Mathematik als „Sprache für gewisse Aspekte der Realtität“ interpretiert werden kann. Der tendenziell statische Charakter der mathematischen Sprache sorgt jedoch dafür, dass sie zur Beschreibung außermathematischer Phänomene nicht ausreicht. Als ernsthafte Konsequenz dieser Auffassung fordert Führer das Verabschieden von einigen „lieb gewonnenen Geltungsansprüchen“ in der mathematischen Fachsprache. Damit meint er vor allem die Tendenzen in den fachsprachlichen Darstellungen, „Sachverhalte als etwas Gegebenes“, etwas „überzeitlich“[9] und „intersubjektiv“ Gültiges zu formulieren. Um dies zu belegen, zieht er folgende Beispiele heran: *„Das lässt sich beweisen.“*, *„Solche Vierecke werden Trapeze genannt.“*, *„Die Parabel wird von der Geraden geschnitten.“*, *„Die Zahl e existiert“*. Sprachliche Mittel, die Mathematiker häufig dafür verwenden, sind Substantivierungen, Verwendung von Präsens oder Passivkonstruktionen.

Auf der theoretischen Ebene kann die Hoffnung auf Vernetztheit und damit ersehnte Verständlichkeit der Mathematik als Sprache durch Ansichten von Manhart (2008), aber auch von Wittenberg (1963) relativiert werden. Beispielsweise bemerkt Manhart (2008, 191ff.) in seinen Arbeiten, dass Mathematik als Kommunikationsmittel auch dann ihre überzeugende, mit anderen Worten Sicherheit verleihende Kraft behält, wenn in ihr formulierte Aussagen von den Adressaten nicht verstanden werden. Für Manhart kann die Übersetzung ohnehin komplizierter Phänomene in die Sprache der Mathematik diese sogar verkomplizieren. Dies soll hier nicht zur Abwertung von Mathematik führen, sondern auf ihre Grenzen in Bezug auf ihre Anwendbarkeit in den anderen Wissenschaften hinweisen.

Wie bei Baptist und Winter (2001, 61) findet sich eine ähnliche, aber über Mathematik hinausgehende Teilung in drei Erfahrungsbereiche findet sich bei Popper:

> *„als erste die physikalische Welt ...; als zweite die Bewußtseinswelt ...; als dritte die Welt ... der möglichen Gegenstände des Denkens: die Welt der Theorien an sich und ihrer logischen Beziehungen; die Welt der Argumente an sich; die Welt der Problemsituationen an sich.“* (Popper 1973, 174)

Dies erlaubt eine Einordnung der mathematischen Welt, der mathematischen Theorien und ihrer logischen Beziehungen, mathematischer Argumente „an sich“ und mathematischer Problemsituationen in einen größeren philosophischen Bezugsrahmen.

[9] In der Formulierung von Grunderfahrungen bezeichnen Baptist und Winter (2001, 61) mathematische Objekte als „ewige“.

Bemerkenswert an der Stelle ist, dass Popper logische Beziehungen weder in der physikalischen Welt noch im Bewusstsein ansiedelt, sondern ihnen ebenfalls eine eigene Welt zugesteht. Somit werden Möglichkeiten angedeutet mathematische Beziehungshaltigkeit oder Vernetzungen zugleich als eine von Menschen entdeckte oder zu entdeckende, produzierte oder zu produzierende, konstruierte oder zu konstruierende und dennoch eigenständige Wirklichkeit zu denken.

In einer früheren Arbeit beschreibt Popper Theorien metaphorisch als Netze zum „Einfangen“, „Rationalisieren“ und „Beherrschen“ der Welt. Demnach arbeitet jeder einzelne daran, „die Maschen des Netzes immer enger zu knüpfen“ (Popper 1971, 31). Das Netz aus Theorien von Popper ähnelt somit dem „mathematischen Universum mit einem Höchstmaß an deduktiven Vernetzungen“ und dem „Reservoir an mathematischen Modellen“, die bei Baptist und Winter „rational interpretieren“ und „systematisch organisieren“ helfen sollen. Das Netz, das Popper beschreibt, steht den Menschen nicht nur zur Verfügung, es wird von den Menschen „geknüpft“. Somit bringt die Metaphorik die konstruktive Seite des Forschungs- bzw. Bildungsprozesses zum Ausdruck. Die verwendete Metaphorik deutet aber auch kleine Unterschiede zur Humboldtschen Konzeption an. Denn während sich bei Wilhelm von Humboldt der Bildungsprozess in der Verknüpfung von Mensch und Individuum vollzieht, was als ein Dialog interpretiert werden kann, wird die Welt bei Popper „beherrscht“ und „eingefangen“ oder mit den Worten von Hischer durch „Vernetzung als Medium angeeignet“ (Hischer 2010, 1ff.). Ob und wie diese Welt den immer enger werdenden Maschen entschlüpfen kann, hängt mit der Frage nach der Relevanz der mathematischen Fortschritte in einer Gesellschaft zusammen (vgl. 2.1.1). Dieser Punkt wird an mehreren Stellen der Arbeit, und zwar in der Auseinandersetzung mit den Ideen von Klein (vgl. 2.2.1), Hischer (vgl. 2.3.3) und Fischer (vgl. 3.2) aufgegriffen.

Während Baptist und Winter vor allem fachinhaltliche Aspekte des Vernetzungsreichtums der Mathematik betonen, unterstreicht Heymann soziale Aspekte des Mathematikunterrichts:[10]

> *„Von der Sozialdimension des Mathematikunterrichts lässt sich noch in einem weiteren Sinne sprechen. Das meiste, was in der Schule – und besonders im Mathematikunterricht – zum Verstehen ansteht, ist etwas, das von anderen vorgedacht ist. [...] Viele andere haben die Welt interpretiert, mit einem Netz von begrifflichen Konstruktionen überzogen.“* (Heymann 1996, 216)

Deshalb empfielt er eintönige Unterrichtsrituale durchzubrechen und Sozialformen zugunsten kooperativer Arbeitsformen zu variieren, um Verstehen mathematischer Sachverhalte zu ermöglichen. Doch auch bei Heymann tritt Mathematik wie bei Baptist und

[10] „Inhaltiches und soziales Lernen lassen sich jedoch nicht voneinander abspalten – selbst im rigidesten Frontalunterricht, in dem der Lehrer nur Fakten vorträgt, lernt man ‚sozial‘.“(Heymann 1996, 113).

Winter eher als „Verstärker" des Alltagsdenkens auf und als etwas, was Denkprozesse begünstigen kann (vgl. Heymann 1996, 248ff.). Mit anderen Worten geht es auch hier vor allem um die Sicherheit, die Mathematik beispielsweise durch ihre Anwendung in der Technik oder Wirtschaft bieten kann. Doch die Sicherheit, die mathematische Vernetzungen oder „Netze mathematischer Theorien" versprechen, kann sich auf lange Sicht als Verunsicherung erweisen. Dies arbeitet Führer in seinen Konturen des allgemeinbildenden Unterrichts heraus.

Führer (1998, 2002) unterteilt die allgemeinbildenden Funktionen des Mathematikunterrichts in *metaphorische Bedeutung*, *epistemologische Kraft* und *emanzipatorisches, mathematikgebundenes Potenzial*. Mit der metaphorischen Bedeutung meint er vor allem die konstruktive Kraft der mathematischen Sprache:

> *„Geht man nämlich den Objekten, von denen die Mathematik handelt, auf den Grund, dann haben sie die fatale Neigung, sich in Eigenschaften, Relationen oder auch metaphorischen Sprechweisen aufzulösen."* (Führer 2002, 73)

Demnach dienen mathematische Sprachschöpfungen als Metaphern innerhalb und außerhalb der Mathematik zur Beschreibung und Konstruktion von Wirklichkeiten. Mathematik bietet demzufolge auch für Führer nicht nur besondere Möglichkeiten, die Wirklichkeit zu beschreiben, sondern auch diese zu erschaffen. Mathematikunterricht wird dementsprechend nicht nur zu einem Ort, an dem Mathematik und somit mathematische Beziehungshaltigkeit thematisiert oder vermittelt wird, sondern darüber hinaus zu einem Ort, an dem sie entsteht.[11]

Nach Führer entwickelt sich das kollektive Bewusstsein im Medium der Analogien oder im metaphorischen Raum:

> *„Welche Metaphern über Tradierung verstanden werden oder werden sollen, entscheidet über die Verbreitung aktiven Besitzes einer Kultur und nimmt Einfluß auf deren künftige Entwicklung. Indem z.B. mathematische Begriffs-, Denk- und Theorieformen andere Wissens- und Wissenschaftsgebiete durchdringen, fließen sie ohnehin metaphorisch in das ein, was kollektiv als Wirklichkeit akzeptiert, antizipiert oder toleriert wird, denn jede Art von Bewußtsein enthält Funktionselemente der sozialen Kontrolle."* (Führer 1998, 506)

Dabei bieten mathematische Metaphern einen Reichtum an Konnotationen, die den Anschluss an soziale, politische und wirtschaftliche Phänomene erlauben und dort ihre konstruktive Kraft entfalten können. Als Beispiele seien hier Abiturdurchschnitt und Intelligenzkoeffizient genannt, die in verschiedenen Bereichen für Begründungen herangezogen werden und bei Entscheidungen berücksichtigt werden (vgl. Führer 1998,

[11] Im Einklang damit bemerken Diederich und Tenorth (1997, 73ff.), dass Allgemeinbildung in der Schule nicht nur vermittelt, sondern zugleich konstituiert wird. Denn in der Schule wird von den Schülern und Lehrern als unmittelbaren Beteiligten am schulischen Bildungsprozess mitentschieden, was in einer Gesellschaft als allgemeinbildend gilt.

506ff.). Das von Führer beschriebene kollektive Bewusstsein ähnelt der Welt der Theorien von Popper, die als Netz die Welt einfangen sollen.

In der „epistemologischen Kraft“ der Mathematik liegt nach Führer die Möglichkeit, innerhalb der konstruierten Wirklichkeit nach Beweisen und Begründungen zu suchen, die intersubjektiven Maßstäben gerecht werden müssen. Bei der Übertragung dieser Begründungen auf die außermathematische Welt ist „emanzipatorisches, mathematikgebundenes Potenzial“ von Bedeutung. Führers (1998, 507) Beispiele (Wissenschaftsglauben bei Pythagoreern, Schädelmessung, schließende Statistik aus Sozialdarwinismus) können aus heutiger Sicht lediglich als Interpretationen und als Rekonstruktionen der Vergangenheit betrachtet werden. Dennoch geben sie zumindest skizzenhaft eine Idee davon, wie Menschen mit Hilfe von Mathematik und mathematischen Vernetzungen, wenn man so will, mit Unsicherheiten über ihre eigene Identität, gesellschaftliche Zusammenhänge, Vergangenheit und Zukunft umgehen können. Sie können zumindest das umreißen, was sprachlich-konstruktive beziehungsweise sprachlich-destruktive Potenziale von Mathematik sein können.[12]

Die Vorschläge von Führer ergänzen die Konzeptionen von Winter und Heymann, indem sie auf die mit Verwendung von Mathematik verbundenen Gefahren verweisen. Über den Ansatz der metaphorischen Bedeutung des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts stellt Führer stärker als Winter und Heymann die sprachlich-konstruktiven Möglichkeiten der Mathematik heraus. Diese Betonung von sprachlichen Aspekten von Mathematik im Kontext der allgemeinen Bildung verträgt sich mit der Auffassung von Humboldt, dass der Mensch durch seine Sprache und nach Führer durch die mathematischen Metaphern eine Welt von sich abscheidet.

In der Gegenwart plädiert Vohns (2010) für eine ausgewogenere Sicht auf die Bedeutung und Funktion von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Mathematikunterricht. Demnach sollen Brüche oder Differenzerfahrungen nicht mehr nur als notwendige Störungen beim Lernen von Mathematik angesehen werden, die langfristig zu beheben sind:

> *„Selbst wenn es um Kohärenz und Kontinuität innerhalb des mathematischen Denkens geht, kann es nicht um die grundsätzliche Auflösung von Differenzerfahrungen gehen, ohne der Sache oder dem Denken der Lernenden Gewalt anzutun.“* (Vohns 2010, 245f.)

Er behauptet, dass klassische Lernbereichsuntergliederungen in Arithmetik, Algebra, Geometrie usw. im Grunde genommen in einem gewissen Sinne Kohärenzen und Differenzen ausdrücken sollen, auch wenn im Unterricht selten die Frage aufkommt, was den Kern einzelner Bereiche ausmacht und worin sie sich unterscheiden (vgl. Vohns 2010,

[12] Wertungen wie diese sind jedoch nur in einem didaktisch-pädagogischen Kontext möglich, in dem Normen und Vorzeichen wie „konstruktiv“ und „destruktiv“ gesetzt werden.

241). Dies hilft auch, innermathematische Beziehungshaltigkeit unter anderen Aspekten zu sehen.

Zwischenfazit

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Begriffe „Verknüpfung“, „Verbindung“, „Vernetzung“ die Diskussion über die Rolle des Mathematikunterrichts für die schulische Allgemeinbildung mitbestimmen. Dabei werden sie nicht explizit definiert, sondern häufig metaphorisch verwendet. Während Verknüpfung bei Humboldt sich allgemein auf die Welt und das Individuum bezieht, wird sie als übergreifende Bereitschaft und Fähigkeit zum „vernetzenden Denken“ bei Klafki im Kontext der Allgemeinbildung gesehen. Im mathematikdidaktischen Zusammenhang hebt Winter innermathematische Vernetzungen als eine Besonderheit der Fachdisziplin hervor, Heymann fordert Verbindungen von sozialen und fachlichen Aspekten. Führer weist explizit auf die Konstruktivität von mathematischer Metaphorik mit damit verbundenen Chancen und Grenzen hin. Die Skizzen von Führer schaffen Raum für das Hinterfragen ausschließlich positiver Einstellungen zur Mathematik als einer beziehungshaltigen und vernetzten Sprache. Sie stellen darüber hinaus Berührungspunkte mit den Ideen von Tenorth her, der den Bildungsprozess als Selbstkonstruktion der Persönlichkeit im Umgang mit Unsicherheiten und in Orientierung an moralischen und kognitiven Bereitschaften und Kompetenzen beschreibt. Schließlich mahnen Ideen von Vohns eine ausgeglichenere Sichtweise auf die innermathematische Beziehungshaltigkeit an, indem sie allgemeinbildenden Mathematikunterricht in dem Spannungsfeld zwischen Kohärenz- und Differenzerfahrungen ansiedeln. Vohns zufolge gehört die Wahrnehmung von Brüchen zwischen verschiedenen mathematischen Bereichen und dem Alltagsdenken der Schüler zum Bildungsprozess.

In der vorliegenden Arbeit werden vor allem innermathematische Vernetzungen eine übergeordnete Rolle spielen, während außermathematische und soziale Gesichtspunkte bei der Konstruktion von Unterrichtsvorschlägen als Mittel zur Förderung von Vernetzungen auf der innerfachlichen Ebene angesehen werden. Der schulische Mathematikunterricht wird in der vorliegenden Arbeit als ein Ort betrachtet, an dem innermathematische Beziehungshaltigkeit nicht nur thematisiert, sondern auch im Kontext der Allgemeinbildung kanonisiert wird. Die an dem Prozess der schulischen Allgemeinbildung unmittelbar beteiligten Schüler und Lehrer bestimmen demzufolge den Werdegang der Mathematik als Wissenschaft mit, indem sie Entscheidungen über ihre Beziehungshaltigkeit bzw. „Beziehungsarmut“ im Schulalltag fällen und mittragen (vgl. Diepgen 2003, 28).

2.2 Beziehungshaltigkeit als Ziel und Mittel des Mathematikunterrichts zugleich

Im zweiten Kapitel ihrer Arbeit bemerkt Brinkmann, dass das Thema Vernetzungen im Mathematikunterricht in der deutschen Mathematikdidaktik nicht neu ist (Brinkmann 2002, 10). Sie bezieht sich beispielsweise auf Vorschläge von Klein, Freudenthal und Kießwetter, um ihre eigene Arbeit einzuordnen. Hier soll ein Bezug zur Arbeit von Brinkmann hergestellt werden. Dabei werden nicht nur Brinkmanns Ausführungen vertieft, sondern um die Ideen einiger weiterer Mathematikdidaktiker ergänzt.

Um die Entwicklung des Phänomens als Übergang von *Beziehungshaltigkeit* zu *Vernetzungen im Mathematikunterricht* historisch zu verfolgen, werden die folgenden Abschnitte chronologisch angeordnet. Dies macht Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den Ansätzen deutlich und erlaubt darüber hinaus, Vermutungen über pädagogisch-historische Kontexte der jeweiligen Ansätze aufzustellen. Die praktische Relevanz derartiger Einordnungen äußert sich einerseits in der Reflexion von normativen Vorgaben, andererseits in der Ableitung von Gestaltungsprinzipien für Aufgabennetze. Dies wird von folgenden Fragen mitbestimmt: Was war damals über Beziehungshaltigkeit bekannt? Welche Bezüge bestehen zwischen den vorgestellten Ansätzen und dem didaktisch-pädagogischen Kontext der jeweiligen Zeit? Welche Handlungsprinzipien können auf die heutige Situation übertragen werden und welche nicht?

2.2.1 Klein: Fusion als Vorläufer von Beziehungshaltigkeit

Für ein besseres Verständnis der Ideen von Klein ist es wichtig zu bedenken, dass seine Vorschläge für den Mathematikunterricht aus der Perspektive eines Mathematikers und der Universitätsmathematik formuliert sind. Seine eigene mathematische Arbeitsweise zieht Klein als Begründung für seine Überlegungen zum Unterricht heran. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass er sich zu den Mathematikern zählt, die nicht in erster Linie „ein Gesamtgebiet in eine Reihe gegeneinander wohl abgegrenzter Teile" zerlegen, um „in einem jeden für sich mit einem Minimum von Hilfsmitteln unter möglichster Vermeidung von Anleihen in den Nachbargebieten auszukommen" (Klein 1924, Band 1, 84). Im Gegensatz dazu gehört Klein zu den Wissenschaftlern, die auf „eine organische Verknüpfung der Einzelgebiete und auf die zahlreichen Anwendungen, die sich gegenseitig gewähren, das Hauptgewicht" legen. Ein Mathematiker dieser Art „bevorzugt demgemäß die Methoden, die ihm das gleichzeitige Verständnis mehrerer Gebiete unter einem Gesichtspunkt erschließen: Sein Ideal ist die Erfassung der gesamten mathematischen Wissenschaft als eines großen zusammenhängenden Ganzen" (Klein 1924, Band 1, S. 84f.).

Illustriert werden kann das an Kleins Habilitationsarbeit „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grad“ von 1884. Dort interpretiert Klein das Ikosaeder als geometrisches Objekt, von dem sich fünf verschiedene mathematische Gebiete abzweigen: Geometrie, Gruppentheorie, Theorie der Invarianten, Differentialgleichungen und Galois-Theorie. Die ersten fünf Kapitel im ersten Teil seiner Monographie gehen diese Theorien durch. Im zweiten Teil widmet sich Klein daran anknüpfend dem Lösen von Gleichungen 5. Grades (vgl. Tjurin 1989, 4f.). In der fachmathematischen Forschung geht es Klein also vor allem um die Verknüpfung verschiedener Gebiete der Mathematik unter anderem durch die gegenseitige innermathematische Anwendung. Wichtig für die Zielstellung der Arbeit ist, dass ein geometrisches Objekt für Klein zum Ausgangspunkt der Diskussionen wird.

Wie wirkt sich das Bestreben Kleins, Mathematik im Ganzen zu sehen, auf seine didaktischen Prinzipien aus? Da das Meraner Programm fachliche Struktur als didaktischen Eigenwert und als Bildungsinhalt an sich anerkennt (vgl. Lenné 1968, 47), weisen die Ideen Kleins im Gegensatz zu den in 2.1 dargestellten Modellen für Allgemeinbildung einen stärkeren Wissenschafts- als Wertbezug auf. Diese Perspektive kommt auch in seiner „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus“, in der vor allem Lehramtsstudierende angesprochen werden sollten, zum Vorschein. So äußert sich Klein beispielsweise über die Bedeutung des Gebiets, welches damals in der Schule als algebraische Geometrie bezeichnet wurde:

> *„Sie haben einen Maßstab für die Wertung dieser Gebiete, wenn Sie sich fragen, ob Sie sie jemals im Hochschulunterricht benutzt haben oder hätten benutzen können. Gewiss nicht: Es handelt sich hier eben um ein Seitenästchen, das nur um seiner selbst Willen künstlich gepflegt wurde und niemals mit anderen Zweigen der Wissenschaft in lebendige Wechselwirkung tritt.“* (Klein 1925, Band II, 229f.)

In der sogenannten algebraischen Geometrie als einem Kapitel der Schulmathematik ging es damals um die Berechnung der Stücke des Dreiecks oder anderer Figuren mit anschließender Konstruktion. Demzufolge orientiert sich Klein sowohl bei der Auswahl von mathematischen Gebieten wie bei den Überlegungen zur Darstellung von Zusammenhängen zwischen diesen Gebieten vor allem an der Universitätsmathematik. Die mathematische Allgemeinbildung besteht für Klein nicht nur in der „Kenntnis der Einzelheiten“, sondern auch „in der Erfassung des sachlichen und historischen Zusammenhangs“ (Klein 1925, Band II, 2). Er kritisiert den zeitgenössischen Mathematikunterricht, indem er sagt:

> *„Vor allem glaube ich, dass die Fusion der verschiedenen Gebiete heutzutage im Unterricht zu wenig durchgeführt ist.“* (Klein 1925, Band II, 228)

Das zeigt er an den Beispielen Projizieren und Zeichnen, die in der Schule nicht mit den anderen Gebieten verschmolzen sind, den Proportionen, die in der Geometrie und Arithmetik gewöhnlich getrennt behandelt werden, und der analytischen Geometrie, die seiner Ansicht nach zu spät im Unterricht aufgegriffen wird. Er bedauert zudem, dass „theoretisch sehr interessante tiefe Fragen“ wie beispielsweise algebraische Unmöglichkeitsbeweise der Konstruktion eines regulären Siebenecks oder der Dreiteilung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal in der Schule gar nicht erwähnt werden (vgl. Klein 1925, Band II, 230).

Klein bleibt aber nicht bei dieser Kritik, sondern schlägt eine sogenannte „weitergehende Fusion“ für die Gebiete der Schulmathematik vor. Die Art seiner Vorlesungen für Lehramtsstudierende gibt Aufschluss darüber, wie eine solche Fusion zwischen mathematischen Gebieten geschehen kann:

> *„Im vorigen Semester habe ich die abstrakten Erörterungen in der Arithmetik, Algebra und Analysis stets durch Figuren und graphische Methoden belebt, die einem die Dinge viel näher bringen und vielfach erst verständlich machen, warum man sich mit ihnen beschäftigt; analog will ich jetzt die Raumanschauung, die natürlich an erster Stelle stehen bleiben muss, von vornherein durch analytische Formeln begleiten, welche im höchsten Maße die präzise Formulierung geometrischer Tatsachen erleichtern.“* (Klein 1925, Band II, 2f.)

Hier werden zwei Richtungen innermathematischer Zusammenhänge angedeutet. Einerseits werden Arithmetik, Algebra und Analysis durch geometrische Mittel belebt, andererseits werden Algebra, Arithmetik und Analysis auf Geometrie angewandt, um diese zu präzisieren. Diese zwei Richtungen lassen sich auch in den konkreten inhaltsbezogenen Vorschlägen für die Schule erkennen. Über Funktionsgraphen soll die Verbindung zwischen Algebra und Infinitesimalrechnung einerseits und der Geometrie andererseits hergestellt werden. Darüber hinaus sollen graphische und überhaupt geometrische Darstellungen auf die Lösung von Gleichungen angewandt werden (vgl. Klein 1925, Band II, 254). Interessant im Hinblick auf Beziehungshaltigkeit an dieser Stelle ist, dass geometrische Mittel bei Klein als „belebend“ für andere Gebiete bezeichnet werden.

Auch wenn Klein fachwissenschaftliche Argumente sehr stark betont, setzt er sich auch mit pädagogischen Aspekten auseinander. Er beschäftigt sich mit den Ideen von Pestalozzi, Herbart und Schopenhauer und erkennt nicht nur die Bedeutung von Anschauung[13] für die Elementar- und Volksschulbildung an, sondern stellt fest, dass die Anschauung auch in Gymnasien nicht nur fortgesetzt, sondern sogar als Selbstzweck thematisiert werden kann (vgl. Klein 1925, Band II, 250f.). Klein versteht unter Anschauung vor allem geometrische Raumanschauung. Am Beispiel des Euklidischen Beweises des pythagoräischen Lehrsatzes zeigt er, dass Anschauung und Logik derart verbunden sind, „dass jeder logische Schritt sofort auch zur anschaulichen Evidenz gebracht wird“ (Klein 1925, Band II, 258). Dabei argumentiert er gegen Schopenhauer, der am Beispiel

[13] Führer bemerkt, dass Auseinandersetzungen mit „Anschauung“ und „Anschauungsräumen“ sich in der Pädagogik wegen ihrer Nähe zur „Weltanschauung“ als ein heikles Thema erwiesen (Führer 2002, 62).

desselben Beweises für gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke zeigen möchte, dass „die Aufeinanderfolge einzelner logischer Schlüsse, die ein strenger mathematischer Beweis enthalten muss" „unerträglich" und „ungenügend" ist (vgl. Klein 1925, Band II, 257). Im Gegensatz zu Schopenhauer bezeichnet Klein die gleichen Beweise als gleichmäßige Mischung aus Anschauung und Logik.

Eine umso wichtigere Rolle spielt die Anschauung bei Klein für den Aufbau von Lehrgängen. Diese sollen laut Klein nicht rein logisch und systematisch, sondern genetisch und anschaulich aufgebaut sein. Dies wird durch Entwicklung der Mathematik als Wissenschaftsdisziplin begründet und mit der Metapher eines sowohl nach unten als auch nach oben wachsenden Baumes beschrieben (vgl. Klein 1924, Band I, 16f.). Trotz der Bedeutung, die Klein der Anschauung beimisst, bleibt für ihn der logische Beweis nicht nur in der Mathematik als Fachwissenschaft, sondern auch im Mathematikunterricht unersetzbar:

> *„[. . .] mag man der Anschauung in der Mathematik auch eine noch so große Rolle als heuristisches, die Wissenschaft förderndes Prinzip zuschreiben, schließlich wird doch als letzte allein entscheidende Instanz immer wieder der von den Voraussetzungen ausgehende logische Beweis eintreten müssen."* (Klein 1925, Band II, 257)

Klein zufolge „müssen die rein logischen Zusammenhänge sozusagen das feste Skelett im Organismus der Mathematik bilden, das ihr die eigentümliche Festigkeit und Sicherheit erteilt" (Klein 1924, Band I, 16f.). An einer anderen Stelle vergleicht Klein (1900, 20ff.) reine Mathematik mit einem „Knochengerüst", der dem ganzen Organismus festen Halt gibt. Auf der anderen Seite kommt nach Klein „das Lebendige" der Mathematik durch ihre Anwendungen und Wechselbeziehungen zu den anderen Gebieten zum Tragen (Klein 1924, Band I, 16f.). Die Anwendung findet für Klein auch innerhalb der Mathematik statt und kann somit verschiedene mathematische Gebiete verknüpfen. Also bleibt die logische Durchdringung des Mathematikunterrichts für Klein als Hauptziel bestehen, geändert wird nur der Weg. Dieser vollzieht sich für Klein als ein Mittelweg zwischen

> *„zwei Extremen (die man beide gelegentlich vorfindet): dem einseitig deduktiven, etwa von vornherein an Euklid anknüpfenden Unterricht und dem bloß auf empirische Aneignung und Verwendung von mathematischen Formeln gerichteten. Wie diese Mittellinie im Einzelnen gezogen werden soll, wird zweckmäßiger Weise in hohem Maße der Individualität des Lehrers vorzubehalten sein; das Wesentliche ist nur, dass überhaupt eine Mittellinie gesucht wird."* (Klein 1900, 16)

An dieser Stelle überlässt Klein die Entscheidung über den Aufbau, die Herstellung der Verbindungen zwischen den Unterrichtsinhalten sowie die Art dieser Verbindungen den Lehrern. Die in seinen Vorlesungen vorgestellten Ideen bieten dem Lehrer eine Auswahlgrundlage dafür. Demnach geben Arbeiten von Klein nicht nur inhaltliche Vorschläge zur Umstrukturierung der gymnasialen Lehrgänge, sie geben Hinweise darauf, wie diese Ansätze methodisch und zwar in Kooperation mit den praktizierenden Lehrern gestaltet und umgesetzt werden können (vgl. Kapitel 3 und 4).

Kleinschen Auffassungen von Mathematik und Mathematikunterricht wohnt darüber hinaus eine gewisse Fortschritts- bzw. Mathematikgläubigkeit inne, die sich durch das folgende Zitat illustrieren lässt:

> *„Wir Mathematiker und Physiker dürfen das stolze Bewusstsein hegen, dass wir ein Wissensgebiet unser eigen nennen, welches der Menschheit fortschreitend immer neuen äußeren Erfolg und innere Einsicht bietet, und diese Freude an diesem Besitz, die müssen wir und wollen wir, wenn sie je uns verloren gegangen sein sollte, wiedergewinnen!“* (Klein 1900, 25)

Mit Rückblick auf Humboldts Gedanken (vgl. 2.1.1) kann Mathematik als eine Sprache interpretiert werden, die nicht nur ein einzelnes Individuum bildet, sondern auch der Menschheit im Allgemeinen. Zugleich werden durch die Mathematik als einer Sprache sowohl der Einsicht des einzelnen Menschen als auch dem gesellschaftlichen Fortschritt Grenzen gesetzt. Insofern kann Mathematik im Sinne von Humboldt nur im Kanon mit anderen Fächern einen Beitrag zur Allgemeinbildung leisten. Gleichermaßen sind mathematische Fortschritte kein Garant für ihre gesellschaftliche Relevanz. Ebenso sind Anforderungen der Universitätsmathematik als Auswahl- und Anordnungskriterien für Unterrichtsinhalte problematisch, weil nicht alle Schüler mathematische und naturwissenschaftliche Berufe ergreifen werden. Trotz der Kritik liefern die Kleinschen Vorschläge wichtige Ansatzpunkte zum Verstehen und für die Analyse des Phänomens der Beziehungshaltigkeit auf der theoretischen Ebene und geben Hinweise für die Gestaltung des Unterrichts. Diese lassen sich vorläufig festhalten:

- *Zur mathematischen Allgemeinbildung gehört die Kenntnis von Zusammenhängen zwischen den einzelnen Gebieten.*
- *Zusammenhänge in der Mathematik als Fachwissenschaft können Hinweise auf die Art von Zusammenhängen in der Schulmathematik geben.*
- *Logische Beweise und Deduktivität geben der Mathematik ihre besondere Festigkeit.*
- *Arithmetik, Algebra und Analysis können durch Geometrie veranschaulicht und in der Geometrie angewandt werden.*
- *Anschauung kann zwischen verschiedenen Gebieten vermitteln, kann aber auch einen Wert an sich haben.*
- *Geometrische Objekte (wie Ikosaeder) können Untersuchungen in verschiedenen Gebieten der Mathematik verknüpfen.*
- *Die Lehrer sind diejenigen, die den Mittelweg zwischen den angewandten und logisch-deduktiven Aspekten der Mathematik im Unterricht bestimmen. Sie treffen die Entscheidungen, wie die Fusion der Gebiete im Konkreten vollzogen wird.*

Wie sich Ideen Kleins in den Ansätzen späterer Didaktikern wiederfinden, wird im Weiteren untersucht.

2.2.2 Exkurs: Metapherngebrauch in Didaktik und Pädagogik

Schon bei der Beschäftigung mit den Allgemeinbildungstheorien und den Modellen des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts kamen metaphorische Wendungen – z.B. „Netz“, „vernetztes Universum“ – vor (vgl. 2.1).[14] Auch Klein verwendet in seinen Ausführungen zu Mathematik und Mathematikunterricht Bilder oder Metaphern (z.B. „Baum“, „Skelett“, „Organismus“, „Mittelweg“). Auch andere Didaktiker, die in dieser Arbeit noch erwähnt werden, verwenden Metaphern, um ihre Ansätze zu beschreiben. Deshalb wird im Folgenden zunächst auf die Funktionen von Metaphern in der mathematikdidaktischen Forschung eingegangen.

Kognitive Funktion von Metaphern

Kognitionspsychologen (vgl. Dörner 1987, 81ff., Arbinger 1997, 88ff.) sehen Metaphern im Zusammenhang mit Analogiebildung als Mittel der Erkenntnisfindung. Für Arbinger (1997, 88) ist eine Metapher „ein externes Modell eines Sachverhalts, das den Ausbau eines internen oder mentalen Modells unterstützen soll“. Didaktische Modelle entstehen Vollrath (2001, 103) zufolge aus Metaphern durch Konkretisierung und Beschreibung. So wird beispielsweise das Mathematiklernen in der Schule als Stufenprozess beschrieben. Die Metapher der Stufe hebt einzelne Stadien des Lernens hervor. Werden die einzelnen Stufen durch Beschreibung der charakteristischen Merkmale konkretisiert, so entsteht aus der Perspektive von Vollrath aus der Metapher der Stufe ein Modell. Die Merkmale der Stufe werden auf den Lernprozess übertragen. Als letzter Schritt muss jedoch noch überprüft werden, inwiefern das Lernen in der Schule tatsächlich den einzelnen Klassen- und Jahrgangstufen zugeordnet werden kann.

Führer hebt, wie bereits in 2.1.2 gezeigt wurde, die metaphorische Bedeutung der Mathematik hervor und weist daraufhin, dass mathematische Objekte sich in Eigenschaften, Relationen oder metaphorischen Sprechweisen auflösen, wenn man ihnen auf den Grund geht. Um auf außermathematische Phänomene übertragen zu werden, muss Führer zufolge vieles in der Mathematik relativer, prozesshafter und subjektiver formuliert werden. Gleichermaßen können mathematische Modelle in der Pädagogik und Didaktik unter ihren metaphorischen Aspekten betrachtet werden. Untersuchungen dieser Art können einen Zugang zur Reflexion mathematischer Modelle für mathematikdidaktische Phänomene ermöglichen. Hiermit könnte emanzipatorisches Potenzial der Mathematisierungen als Metaphorisierungen in der mathematikdidaktischen Forschung wirksam werden. Die Annahme von der Mathematisierbarkeit der Naturphänomene und der didaktisch-pädagogischen Sachverhalte wäre dadurch relativiert, dass mathematische

[14] Metaphern können in einem erweiterten Sinne als Mittel der Veranschaulichung von didaktischen und pädagogischen Sachverhalten interpretiert werden.

Beschreibungen oder Modelle als mathematische Metaphern erkannt werden und so eher in ihrem Geltungsbereich hinterfragt werden können (Führer 2002, 73).

In ihrer heuristischen Funktion fokussieren Metaphern Zusammenhänge, präzisieren bestimmte Aspekte eines Sachverhalts, indem sie andere ausblenden. Für Guski lassen sich pädagogische Phänomene wie schulisches Lernen in ihrer Komplexität ausschließlich metaphorisch beschreiben (vgl. Guski 2007, 470). So wird beispielsweise der Grundwiderspruch zwischen Instruktion und Konstruktion durch die Metapher des schulischen Lernens als Fortbewegung auf einem Weg ausgedrückt. Einen Weg kann man allein beschreiten oder geführt werden (vgl. Guski 2007, 144ff.). An einer anderen Stelle bemerkt Guski, dass keine Metapher das komplexe und widersprüchliche Konzept des schulischen Lernens in seinem vollem Umfang zu beschreiben vermag. Erst ein Nebeneinander von verschiedenen metaphorischen Modellen kann, so Guski, ein umfassenderes Bild der Zieldomäne abgeben. Im Weiteren wird gezeigt, dass dies ebenfalls die Beziehungshaltigkeit und Vernetzungen betrifft (vgl. 1.6.1).

Kommunikative Funktion von Metaphern

An einer anderen Stelle beschreibt Arbinger (1997, 89) die Metapher als ein wichtiges Kommunikationsmittel, das sich zur Hervorrufung von Gefühlen und Vermittlung von Überzeugungen eignet. Mit Metaphern werden Bedeutungsinhalte transportiert, die wörtlich nur schwer oder gar nicht auszudrücken wären. Sie werden in der Pädagogik, aber auch in der Didaktik häufig mit Metaphern um- bzw. beschrieben. Dabei werden Metaphern nicht von allen an der Kommunikation Beteiligten als solche erkannt. Das kann nie vollständig vermieden werden, weil eine konsequente Reflexion und Explikation der Begriffe den Kommunikationsfluss auf Dauer behindern kann. Auf das Letztere haben Fischer und Malle als Widerspruch zwischen Exaktheit und Kommunikation hingewiesen (Fischer und Malle 1985, 163). In diesem Spannungsfeld erscheinen Metaphern mit ihrer Deutungsoffenheit in einem anderen Licht. Sie können nicht nur zwischen Begriffen der Didaktik und denen ihrer Bezugswissenschaften (beispielsweise Mathematik, Psychologie, Soziologie und Pädagogik) vermitteln, sondern auch zwischen Interessen der an der didaktischen Diskussion beteiligten Akteure. Wie in anderen angewandten und interdisziplinären Forschungsfeldern auch, werden in der Mathematikdidaktik verschiedene Interessen (beispielsweise die der Lehrer, Eltern, Schüler, Fachdidaktiker) vertreten und Erwartungen formuliert. Diese Interessen bzw. Erwartungen können sich zum Teil widersprechen. Ein in dem Zusammenhang in der Wissenschaftstheorie für angewandte Forschungsfelder entwickeltes allgemeineres Konzept ist das Konzept der „boundary objects“ oder der Grenzobjekte (Star und Griesemer 1989, 393):

> *„Boundary objects are both plastic enough to adapt to local needs and constraints of the several parties employing them, yet robust enough to maintain a common identity across sites. They are weakly structured in common use, and become strongly structured in individual-site use. They may be abstract or concrete. They have*

> *different meanings in different social worlds, but their structure is common enough to more than one world to make them recognizable, a means of translation. The creation and management of boundary objects is key in developing and maintaining coherence across intersecting social worlds.“*

Dabei kann es sich um eine Idee, einen Begriff oder ein Produkt handeln, die verschiedene Deutungen zulassen und dabei zwischen Interessen (in unserem Fall der Schüler, der Wissenschaftler und der Lehrer) vermitteln ohne ihre Identität zu verlieren. Häufig sind die beteiligten Parteien sich von Anfang an bewusst, dass es keine für alle gültige Interpretation des Grenzobjektes geben kann.

Für Guski (2007, 21) treten Metaphern in ihrer kommunikativen Funktion in der öffentlichen Diskussion der Aufgaben der Schule auf. Wenn es darum geht, theoretische Überlegungen zu Vernetzungen auf die Praxis der Schule zu beziehen, liegt es nahe, Metaphern zu gebrauchen, um die Kommunikation zu erleichtern und in vielen Fällen sogar zu ermöglichen. Metaphern dienen demzufolge als Verständnisbrücken und beschleunigen die Kommunikation. In der vorliegenden Arbeit werden mit Hilfe der Netz-Metapher Aufgabennetze unter Bezug zu theoretischen Ansätzen und praktischen Erprobungen entwickelt. Sie sollen als Grenzobjekte zwischen verschiedenen theoretischen Ansätzen und Interessen vermitteln.

In den programmatischen Texten, die beispielsweise Veränderungen in der Bildungspolitik oder der Unterrichtspraxis bewusst hervorrufen wollen, werden Metaphern in ihrer appellativ-argumentativen Funktion eingesetzt. Sie lassen Ideen, Phänomene und Produkte in einem bestimmten Licht erscheinen und suchen den Beteiligten davon zu überzeugen. Als Beispiel führt Guski die moderne Netz-Metapher auf, die zu einer neuen Wahrnehmung des schulischen Lernens bei den Betroffenen führen sollte (vgl. Guski 2007, 22ff.).

In ihrer Reflexion der Gefahren im Gebrauch der Metaphern bemerkt Guski: „Metaphern werfen mehr Fragen auf, als sie beantworten“ (Guski 2007, 27). Diese Gefahr kann gleichzeitig als Chance zur Weiterentwicklung einer Wissenschaftsdisziplin wie z.B. der Mathematikdidaktik wahrgenommen werden. Denn insbesondere in der Didaktik der Mathematik geht es nicht nur darum, Fragen zu beantworten, sondern neue Fragen zu entdecken und zu formulieren. Die Sicht auf didaktische Begriffe als Metaphern erlaubt somit das Hinterfragen von bereits formulierten Antworten, die beispielsweise als Zielsetzungen des Mathematikunterrichts in Deutschland nach PISA mit Hilfe von Modellierungs- und Vernetzungsbegriffen formuliert wurden (vgl. Baumert, Stanat, Demmrich 2001, 19ff.).

Metaphern bei Felix Klein

Sowohl der kognitive als auch der kommunikative Gebrauch von Metaphern sind für Klein von Bedeutung, weil er nicht nur über Mathematik nachdenkt, sondern in der Lehrerausbildung und in der Zusammenarbeit mit schon erfahrenen praktizierenden Lehrern bewusst die Schulwirklichkeit beeinflussen möchte. Vor allem die Metapher eines sich sowohl nach oben wie auch nach unten ausbreitenden Baumes steht für die Mathematik als wissenschaftliche Disziplin einerseits und für die Schulmathematik andererseits. Somit wird eine Analogie zwischen dem Werdegang der Mathematik als einer wissenschaftlichen Disziplin und der Entwicklung des mathematischen Lehrgangs in der Schule angenommen. Demnach ist es Klein zufolge weder in der Mathematik als einer wissenschaftlichen Disziplin noch im mathematischen Lehrgang in der Schule möglich, einen Anfangspunkt zu finden, von dem aus alles andere logisch-deduktiv abgeleitet werden kann (vgl. 2.2.1).

Auch die Metapher des Knochengerüstes, die Klein für den logischen Aufbau der Mathematik verwendet, gilt sowohl für die Mathematik als Wissenschaft wie auch für die Mathematik in der Schule. Somit werden durch eine Analogie wesentliche Ähnlichkeitsmerkmale hervorgehoben und das logische Denken als eines der Hauptziele des Mathematikunterrichts betont, ohne dabei überbetont zu werden. Denn ein Gerüst aus Knochen und ohne Fleisch, d.h. ohne Anschauungen und Anwendungen von außerhalb oder aus der Geometrie, kann nicht überleben. Somit werden mit Hilfe der Metaphorik nicht nur der Stellenwert, sondern auch Qualitätsunterschiede von innermathematischen Beziehungen durch logische Zusammenhänge einerseits und Veranschaulichungen und Anwendungen andererseits beschrieben. Dabei machen Redewendungen wie „um wieder ohne Bild zu sprechen“ (vgl. Klein 1924, Band I, 16f.) deutlich, dass Klein bewusst Metaphern einsetzt.

Nach Guski dominieren im pädagogischen Kontext in der Zeit um 1900 organologische Bilder wie „Gestalt“, „Körper“ und „Organismus“. Diese Metaphern drücken zwar keine grundlegend neuen pädagogischen Forderungen aus, bündeln jedoch durch ihren Allgemeinheitsgrad Vorstellungen von Ganzheitlichkeit in verschiedenen Bereichen von schulischer Erziehung. Diese metaphorischen Konzepte können im didaktisch-pädagogischen Kontext als Vorläufer der aktuell weit verbreiteten Metaphern „Netz“ und „System“ gesehen werden. Vor allem die System-Metapher trägt ebenfalls organologischen Charakter und wird auch in der Biologie eingesetzt, um komplexe ganzheitliche Zusammenhänge zu beschreiben (vgl. Guski 2007, 361ff.). In diesem Sinne spiegelt Kleins Metaphorik pädagogische Tendenzen nach Ganzheitlichkeit seiner Zeit wider.

In den folgenden Kapiteln dieser Arbeit wird gezeigt, wie ausgehend von der Netz-Metapher verschiedene didaktische Modelle an konkreten Beispielen für den Unterricht entwickelt wurden. Dabei soll die Metapher des Netzes zu einem metaphorischen Modell werden, das im Lichte der Fragestellungen wesentliche Merkmale des Mathematikunterrichts hervorhebt. Des Weiteren soll die Netz-Metapher zwischen den älteren Ansätzen um den Begriff „Beziehungshaltigkeit“ und den neueren um „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ vermitteln, um eine vielseitige theoretische Perspektive als Grundlage für die Entwicklung von Aufgabennetzen zu entwickeln und Kriterien für die Auswertung ihrer praktischen Erprobung abzuleiten. Dadurch soll die Metapher des Netzes für diese Arbeit ihre kognitive bzw. erkenntnistheoretische Funktion erfüllen. In ihrer kommunikativen Funktion wird die Netz-Metapher vor allem bei der Konstruktion von Aufgabennetzen in Kooperation mit Lehrern und Schülern sowie bei ihrer praktischen Erprobung eingesetzt.

2.2.3 Lietzmann: „Netzcharakter der Mathematik“ an Beispielen

In der Verwendung von Metaphern knüpft Lietzmann an Klein an. Um die dynamischen Aspekte der Mathematik zu unterstreichen, beschreibt er diese beispielsweise als einen Baum (vgl. Lietzmann 1927, 1). Um ihrer Stabilität einen Ausdruck zu verleihen, gebraucht er die Metapher eines Hauses (Lietzmann 1949, 1). Die Gebäude-Metapher wird in der Pädagogik nach Guski häufig gebraucht, um die systematische Ordnung des Wissens zu beschreiben. Außerdem wird in dem metaphorischen Konzept eines Hauses das Konzept des Lernens als Fortbewegung aufgehoben. Das Gebäude hat eine horizontale und vertikale Orientierung und erlaubt die Beschreibung des Lernens der Mathematik als Aufsteigen und in die Tiefe gehen, wobei das Letztere mit dem Sichern und Stabilisieren assoziiert wird. Die Metapher ist aber auch auf das Konzept des Lernens als Aufbau und gemeinsame Konstruktion des Wissens erweiterbar (Guski 2007, 156). Weitere Metaphern, die Lietzmann verwendet, um das Wesen der Mathematik zu beschreiben, sind „Netz“ und „Kette“. Mit seinem Buch „Der pythagoreische Lehrsatz“ möchte er

> *„zeigen, wie mannigfache Beziehungen zwischen den verschiedenen Gebieten der Mathematik [...] ein Netz bilden, nicht eine Kette“* (Lietzmann 1912, Vorwort).

Zur Illustration von metaphorisch ausgedrückten Auffassungen werden des Weiteren einige Beispiele aus dem Buch vorgestellt. „Der pythagoreische Lehrsatz“ ist thematisch und bereichsspezifisch in acht Kapitel unterteilt (siehe Abb. 2.1). Doch der Autor legt viel Wert darauf, innerhalb der einzelnen Kapitel auch auf Fragen aus den anderen Bereichen einzugehen. So wird beispielsweise bei den Zerlegungsbeweisen auch auf die Binomischen Formeln eingegangen. Geometrische Figuren werden mit Verweis auf Euklid und indische Mathematik als Bilder der Formel bezeichnet.

INHALTSVERZEICHNIS.

Abbildung 2.1: Acht Kapitel „Des pythagoreischen Lehrsatzes“ (1912)

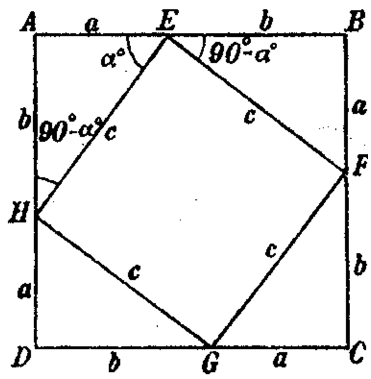


Abbildung 2.2: Beweisfigur

Ein anschaulicher Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes wird in drei Schritten geführt. Im ersten Schritt, den Lietzmann als arithmetisch bezeichnet, handelt es sich zunächst um die binomische Formel $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, die für beliebig gewählte Werte allgemeingültig ist. Im zweiten Schritt wird die Gleichung $(a + b)^2 = c^2 + 2ab$ geometrisch bewiesen. Sie bezieht sich auf die Flächeninhalte entsprechender Quadrate und Dreiecke, die in der Abbildung 2.2 dargestellt sind. Im dritten Schritt werden die beiden Gleichungen zusammengefügt zu $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$. Durch Subtraktion von $2ab$ auf beiden Seiten entsteht die Formel $a^2 + b^2 = c^2$, wobei a und b für die Längen der Katheten und c für die Länge der Hypotenuse stehen. Schließlich wird die präsentierte Vorgehensweise als Vermischung von arithmetischen und geometrischen Methoden reflektiert. Im Zuge dieser Reflexion werden die Unterschiede zwischen arithmetischen und geometrischen Methoden an zwei Sätzen veranschaulicht. Lietzmann nennt sie zwei Gesichter dieser Sätze (Lietzmann 1968, 14ff.). Sie wurden zum Vergleich in einer Tabelle gegenübergestellt(S. 40).

„geometrische“ Flächenlehre	„arithmetische“ Flächenlehre
Zwei Parallelogramme sind flächeninhaltsgleich, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.	Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe.
Zwei Dreiecke sind flächeninhaltsgleich, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.	Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe.

Das Wesentliche der geometrischen Flächenlehre ist der Flächenvergleich, und das Wesentliche der arithmetischen Flächenlehre ist die Flächenberechnung. Durch Übersetzungen zwischen den „arithmetischen“ und „geometrischen“ Sätzen können Objekte und Zusammenhänge aus Geometrie und Algebra entdeckt oder konstruiert werden. Während die Flächengleichheit in der „geometrischen Flächenlehre“ entscheidend ist, ist in der „arithmetischen Flächenlehre“ das Produkt als arithmetisches Konzept entscheidend.[15]

Als Gegensatz zu den anschaulichen Zerlegungsbeweisen stellt Lietzmann im nächsten Kapitel des Buches sogenannte Euklidische Beweise vor. Dabei argumentiert er wie Klein auch gegen Schopenhauers Ausführungen, indem er die Metapher einer Kette heranzieht. Ein Euklidischer Beweis des Satzes ist für Lietzmann nicht wie bei den Zerlegungsbeweisen eine von verschiedenen Seiten zu beleuchtende, im Zentrum des Ganzen stehende Tatsache, sondern ein „Glied einer langen Kette“ von Sätzen. Jedes Glied der Kette kann durch logische Schlüsse aus dem vorangegangenen abgeleitet werden. Die Anschaulichkeit ist dabei nach Lietzmann eine Nebensache. Daraufhin fügt er die Umkehrung und die Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes und den Satz von Pappos als weitere Glieder in der Kette an, die dem Satz des Pythagoras folgen (vgl. Lietzmann 1968, 37ff.). Auch hier erscheinen logische und systematische Aspekte von Geometrie und ihre Anschaulichkeit teils als widersprüchliche, teils als sich ergänzende Sichtweisen. Die eine Sichtweise betrifft die Anschaulichkeit und Mehrperspektivität der Geometrie, die andere die Strenge ihres logischen Systems. Diese Ambivalenz verschärft sich dadurch, dass Lietzmann im Vorwort des Buches zeigen möchte, dass Mathematik keine Kette ist, sondern ein Netz.

Als ein weiteres Beispiel für Verknüpfung von Geometrie mit außergeometrischen Fragestellungen können hier Funktionsbetrachtungen genannt werden. Diese fangen mit der Feststellung an: „Jede Seite ist eine Funktion der beiden anderen“ (Lietzmann 1968, 64). Da es sich im schulischen Kanon um Funktionen einer Veränderlichen handelt, gibt Lietzmann einer Seite einen festen Wert a und stellt folgende Fragen:

1. *Wie ändert sich die Hypotenuse, wenn eine Kathete veränderlich ist, die andere konstant bleibt?*

[15] Ein derartiger Vergleich könnte zum Anlass von Kohärenz- und Differenzerfahrungen, die Vohns beschreibt, werden (vgl. 2.1.2).

2. *Wie ändert sich eine Kathete, wenn die Hypotenuse veränderlich ist, die andere Kathete konstant bleibt?*

3. *Wie ändert sich eine Kathete, wenn die andere Kathete veränderlich ist, die Hypotenuse konstant bleibt?*

Beispielsweise ergibt sich aus der Behandlung der ersten Frage eine Funktion mit der Gleichung $y = \sqrt{x^2 + b^2}$. Diese wird mit Hilfe von Tabellen untersucht und ihre Graphen werden in ein Koordinatensystem gezeichnet. Anknüpfend daran wird der Begriff der Umkehrfunktion eingeführt und in der konkreten Situation wiederum geometrisch gedeutet: Die Hypotenuse wird einmal mit y, das andere Mal mit x bezeichnet, während es mit der Kathete umgekehrt ist (Lietzmann 1968, 64ff.). Die Fragestellungen geben Hinweise darauf, wie geometrische Objekte und Sätze zu den Betrachtungen von Funktionen in der Sekundarstufe I überleiten können.

Genauso wie für Klein drückt sich der Netzcharakter der Mathematik für Lietzmann im Wechselspiel von Geometrie, Arithmetik und Algebra aus. Beide konzentrieren sich auf die Darstellung um ein geometrisches Problemfeld. Bei Klein ist es beispielsweise das Ikosaeder und bei Lietzmann der pythagoreische Lehrsatz. Im Gegensatz zu Kleins Beispielen sind die Beispiele von Lietzmann stärker an der Schulmathematik orientiert. Einige von ihnen und insbesondere die zu den Zerlegungsbeweisen des pythagoreischen Lehrsatzes mit der Vermischung von arithmetischen und geometrischen Methoden lassen sich direkt zumindest im Gymnasium einsetzen. Andere Vorschläge wie z.B. Funktionsbetrachtungen zum pythagoreischen Lehrsatz müssen erst an die gegebenen Rahmenbedingungen angepasst werden.

Lietzmanns Darstellungen liefern Beispiele für einen Versuch, Mathematik oder mathematische Beziehungshaltigkeit mit Hilfe von mehreren, sich scheinbar widersprechenden metaphorischen Konzepten (Baum, Haus, Netz, Kette) zu beschreiben, um der Komplexität des Phänomens (Dynamik, Stabilität, starker innerer Zusammenhang, Linearität) gerecht zu werden. Diese Beschreibungen betreffen eher das Wesen der Mathematik als die Gestaltung des Mathematikunterrichts, auch wenn beide Aspekte schwer voneinander trennbar sind. Nicht nur in der Metapher des Netzes, sondern auch in der Wahl der Beispiele bezieht sich Wittenberg auf Lietzmann und verweist explizit auf Lietzmanns Beispiele (vgl. Wittenberg 1963, 86, 120, 130).

2.2.4 Wittenberg: „Themenkreise“

Wittenberg orientiert sich stärker an psychologischen Erkenntnissen seiner Zeit, stellt sein Konzept in den Kontext von Bildungstheorie (vgl. 2.1.2) und formuliert ausgehend davon seine unterrichtsmethodischen Vorschläge. Für Wittenberg ist Beziehungsreichtum das, was die authentische Begegnung mit Mathematik als Wissenschaft ausmacht:

> *„Im Unterricht muss sich für den Schüler eine gültige Begegnung mit der Mathematik, mit deren Tragweite, mit deren Beziehungsreichtum vollziehen; es muss ihm am Elementarem ein echtes Erlebnis dieser Wissenschaft erschlossen werden. Der Unterricht muss dem gerecht werden, was Mathematik wirklich ist.“* (Wittenberg 1963, 50f.)

Im Einklang mit den Ausführungen zu den Werken von Klein und Lietzmann (vgl. 2.2.1, 2.2.3), die die Geometrie zum Ausgangspunkt der Beschreibung der Mathematik wählen, entscheidet sich auch Wittenberg für geometrische Beispiele (Dreiecke, Ähnlichkeit, Messen), um die Themenkreismethode vorzustellen:

> *„Die Geometrie steht im Zentrum zwischen unserem Denken und der physikalischen Wirklichkeit und am Ursprung wichtiger philosophischer Probleme.“* (Wittenberg 1963, 71)

Wittenberg möchte dem Schüler Zeit lassen und geht von ganz allgemeinen Fragestellungen aus. Das sind Fragestellungen wie: *Worum handelt es sich in Geometrie? Was ist ein Zirkel? Was ist ein Lineal?* Er kommt dann zu Fragen der Art: *Was für Dreiecke gibt es? Wie kann ein Dreieck konstruiert werden? Wodurch zeichnet sich ein gleichschenkliges bzw. gleichseitiges Dreieck aus? Flächenlehre*, *Maßzahlen*, *Ähnlichkeit* und *Trigonometrie* und schließlich *Inkommensurabilität* von Strecken sind Themen, die sich auf diese Weise anbahnen sollen und in Abbildungen strukturiert werden. Als Zusammenhänge zwischen Geometrie und anderen Gebieten können dabei Motivationen der Zahlenbereichserweiterungen angesehen werden (Wittenberg 1963, 67ff.).

Wittenbergs Bezug (1963) zur Gestaltpsychologie beeinflusste sehr stark seine unterrichtsmethodischen Vorschläge (vgl. 2.1.2). So beschreibt Wittenberg in Anlehnung an Wertheimer (1986, 99ff.) seine Themenkreise:

> *„Der einzelne Themenkreis stellt dabei selber ein durchgespanntes, dynamisches Gebilde dar, bestimmt durch Vektoren, die von einer einfachen zentralen Gegebenheit – einer Feststellung, einem Problem, einer Figur – zu wenigen bedeutsamen Ergebnissen weisen; Ergebnissen, die unser Bemühen wirklich lohnen. Was an sich nebensächlich, aber im Ganzen unentbehrlich ist, erscheint deutlich als Baustein, der nur um seiner Funktion im Ganzen willen da ist. Nach Durcharbeiten eines Themenkreises muss für einen Schüler ein überblickbares, um eine sehr kleine Zahl von Ideen und Ergebnissen zentriertes Ganzes verbleiben, dessen gedankliche Gliederung sich allenfalls in durchsichtigen Diagrammen [...] festhalten lässt.“*(Wittenberg 1963, 142)

Die *Themenkreismethode* wurde von Wittenberg (1963, 148) als Lösung gegen die „Verzettelung durch Lektionenmosaik“ in der Schule vorgeschlagen (vgl. 2.2.4). Die Abbildung 2.3 veranschaulicht die Idee der Themenkreise am Beispiel „Flächenlehre“.[16]

[16]Es handelt sich herbei um eine Kopie aus dem Original.

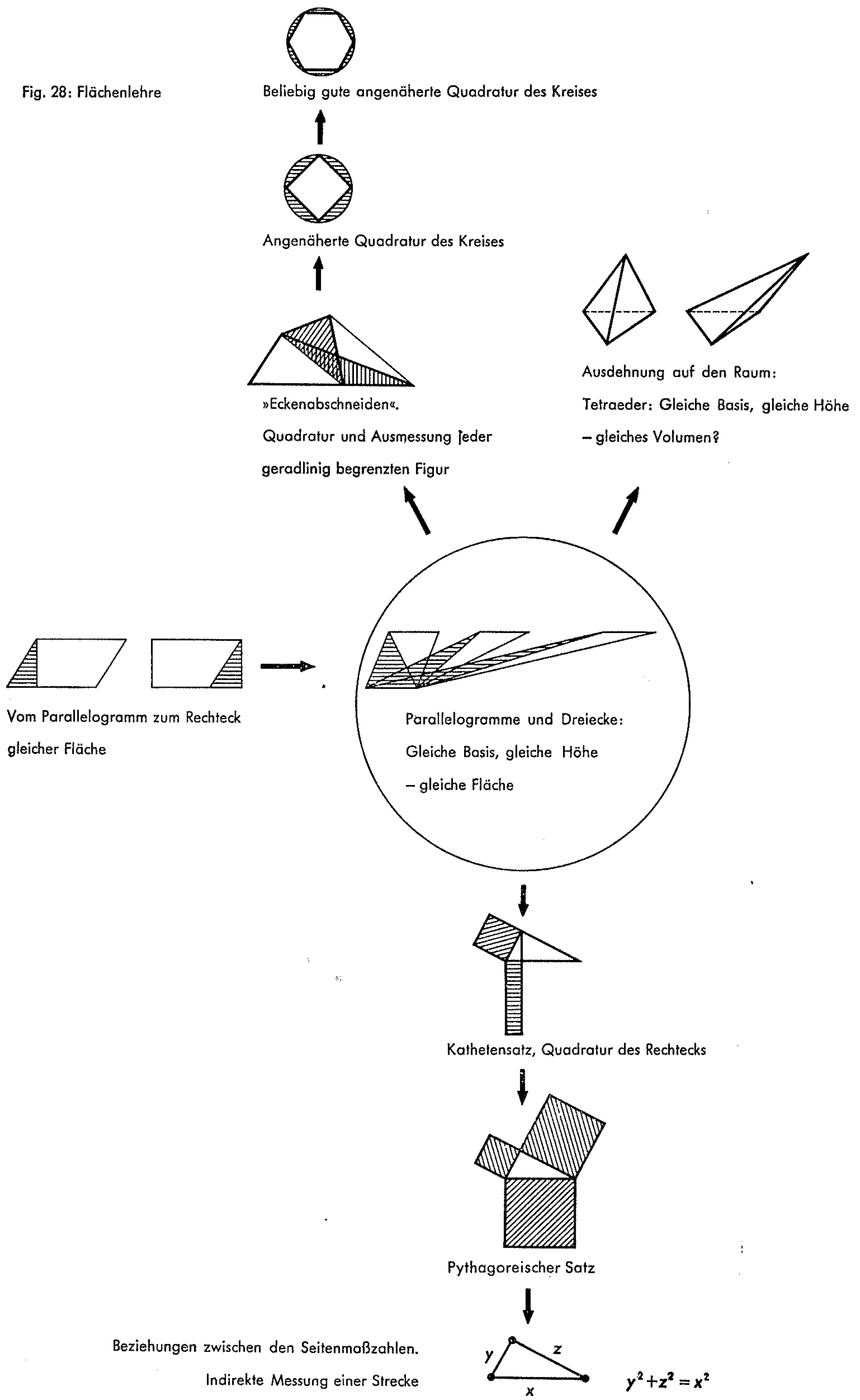


Abbildung 2.3: Flächenlehre (Wittenberg 1963, 143)

Bei der Bearbeitung von Themenkreisen unterstreicht Wittenberg (1963, 147) die Bedeutung von zwei Phasen:

> *„Die Erarbeitung eines Themenkreises wird grundsätzlich immer in zwei Stufen erfolgen: allmählich fortschreitende Entfaltung von einem einfachen Ausgangspunkt aus; sodann zusammenfassender, umfassender Rückblick auf das Erarbeitete, das in der Rückschau als ein durchsichtiger, klar gegliederter, deutlich sachbezogener gedanklicher Bau gesehen werden muss. Ziel ist hierbei, dem Schüler den ganzen Inhalt des studierten Themenkreises zum geistigen Erlebnis werden zu lassen.“*

In Bezug auf die Umsetzbarkeit der Vorschläge von Wittenberg im regulären Schulunterricht müssen jedoch auch die Ausgangsbedingungen, mit denen er rechnet, berücksichtigt werden. Diese werden im Folgenden in drei Punkten zusammengefasst:

- Die Vorschläge von Wittenberg wurden für Gymnasiasten als schulischer Elite formuliert (vgl. Wittenberg 1963, 45ff.).
- Die Rahmenbedingungen erfordern das Aufbrechen des 45-Minuten-Taktes des Unterrichts durch „Epochenunterricht“ (vgl. Wittenberg 1963, 148).
- In den Vorschlägen von Wagenschein und Wittenberg wird die Schulklasse als Einheit wahrgenommen, demzufolge wird an vielen Stellen im Hinblick auf einen einzelnen „imaginären“ Schüler argumentiert (Lenné 1969, 66).

Ausgehend von diesen Punkten stellt sich die Frage nach der Übertragbarkeit der methodischen Vorschläge auf andere Schularten als das Gymnasium. Die nächste Frage zielt auf die Realisierbarkeit der Vorschläge angesichts des 45-Minuten-Taktes des Unterrichts. Und die letzte und entscheidende Frage lautet: Wie lassen sich die Argumentationen, die auf einen einzelnen Schüler bezogen sind, auf eine Schulklasse erweitern? Diese Fragen sollen bei der Konstruktion von *Aufgabennetzen* berücksichtigt werden (vgl. 3). Die Unterschiede in den Lernvoraussetzungen der Schüler berücksichtigt Freudenthal in seinem Konzept der Beziehungshaltigkeit.

2.2.5 Freudenthal: „Beziehungshaltigkeit“ und „lokales Ordnen“

Wie bei Lietzmann taucht bei Freudenthal die Metapher der Kette auf. Sie beschreibt dennoch nicht Eigenschaften der Mathematik (Linearität der Fachsprache oder mathematischer Beweise), sondern die Merkmale des Unterrichts:

> *„Es ist oft, und wohl unter dem Einfluss der Herbartschule so aufgefasst worden, dass der Unterricht in einem Fache eine zusammenhängende Kette bilden soll.“* (Freudenthal 1973, 76)

Diese „Kette“ wird vom Lehrer „lang“ und „listig“ konstruiert. Doch nicht diese Stetigkeit, sondern gerade die Unstetigkeit, die Überraschung interessiert Freudenthal zufolge die

Schüler. Er behauptet, dass im Mathematikunterricht thematisierte Inhalte von den Schülern deshalb so schnell vergessen werden, weil sie keine Beziehung zu der Wirklichkeit des Schülers haben. Die von dem Lehrer oder dem Lehrbuchverfasser konstruierten Beziehungen sind Fremdkörper in der Wirklichkeit des Schülers und können deshalb nicht lange behalten werden. Beziehungshaltigkeit wird somit zum lernpsychologischen Argument (vgl. Wittmann 2009, 59ff., Vollrath 2001, 60ff., Brinkmann 2002, 60). Sie soll garantieren, dass das Gelernte nicht vergessen wird:

> *„Es ist an und für sich ein gesunder Standpunkt, dass man nicht isolierte Brocken, sondern kohärentes Material lernen soll. Was zusammenhängt, lernt sich besser und wird besser behalten.“* (Freudenthal 1973, 75)

Zwei weitere Argumente Freudenthals für die Beziehungshaltigkeit im Mathematikunterricht können zugleich als Mittel aufgefasst werden, mit denen Beziehungshaltigkeit im Unterricht erzielt werden kann. Das erste Argument liegt für Freudenthal in dem Wesen der mathematischen Beziehungen. Der vollkommene Ausdruck innermathematischer Beziehungen ist nach Freudenthal das mathematische System. Dies ist jedoch für Freudenthal nicht jedem Schüler zugänglich. Er unterscheidet zwischen den Schülern, die mathematische Berufe anstreben, und denen, die es nicht tun. Das mathematische System mit seinen vollkommenen und reichen inneren Beziehungen kann nach Freudenthal nur für angehende Mathematiker das Ziel der Bildung sein. Für den Rest der Schüler ist es wichtig, Mathematik anwenden zu können. In diesem Sinne ist beziehungsvolle Mathematik in der Schule für Freudenthal vor allem „angewandte, anwendende oder anwendbare Mathematik“. Somit versteht Freudenthal unter Beziehungshaltigkeit in erster Linie nicht die Beziehungen innerhalb des Faches. Derartige Beziehungen ergeben sich für ihn von selbst, wenn sie natürlich sind. Künstliche Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten haben ihm zufolge keinen didaktischen Wert. Hierbei macht er den Schüler zum Maßstab für Natürlichkeit bzw. Künstlichkeit der innermathematischen Beziehungen:

> *„Ob sie [die Beziehungen] künstlich sind, soll vom Standpunkt des Schülers entschieden werden.“* (Freudenthal 1973, 76)

Somit möchte Freudenthal die Pflege innermathematischer Beziehungen auf keinen Fall aus dem Unterricht ausschließen, insoweit diese den obigen Kriterien genügen.

Geometrie ist ebenfalls für Freudenthal (1973, 379) ein hervorragendes Mittel, um beziehungshaltige Mathematik zu unterrichten, weil sie eng mit der Wirklichkeit verknüpft ist, „an die man tagtäglich erinnert wird“. Angefangen mit konkretem Material wie Modellen geometrischer Körper, die die Schüler anfassen können, stellt er seine Ideen vom „lokalen Ordnen“ vor.[17] Dies ist eine Möglichkeit, Deduktivität der Geometrie Schülern zugänglich zu machen, ohne den Unterricht mit Axiomatik zu überfrachten (Freudenthal 1963, 5ff.):

[17] Wittmann (1974) verknüpft an Beispielen aus dem Geometrieunterricht der Sekundarstufe I *lokales Ordnen* nach Freudenthal und *Themenkreise* nach Wittenberg und Wagenschein.

> *„Erstellt man ein Beziehungsgefüge zwischen einzelnen Sätzen, so kann man zu der Erkenntnis kommen, dass man nicht alles beweisen kann, sondern dass man gewisse unbewiesene Sätze an die Spitze stellen muss.“*

Wie das lokale Ordnen im Unterricht geschehen kann, zeigt Freudenthal (1973, 424) am Beispiel einer Aufgabe zu den Mittelsenkrechten:

> *„Zeichne die Mittelsenkrechten von AB und BC, die sich in M schneiden, und schau, was die Mittelsenkrechte von AC macht.“*

Die Mittelsenkrechte der Strecke XY besitzt die Eigenschaft, dass sie die Menge der von X und Y gleich weit entfernten Punkte ist. Diese Eigenschaft brauchen die Schüler nicht beweisen zu können, um weitere Erkenntnisse daraus abzuleiten. Diese beziehen sich z.B. auf die Entdeckung und den Beweis des Satzes über die Mittelsenkrechten in einem Dreieck, Transitivität der Streckengleichheit, Gesetzmäßigkeiten in symmetrischen und nicht symmetrischen Fällen und Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks (Freudenthal 1973, 424f.).

An einer anderen Stelle stellt Freudenthal innermathematischen deduktiven Beziehungen inner- und außermathematische Analogien als wirksame Werkzeuge der Beziehungshaltigkeit voran. So bemerkt er, dass auf die Darstellung vieler wesentlicher Beziehungen zwischen Arithmetik, Geometrie und Mengenlehre am Anfang im Unterricht verzichtet werden muss. Viele Beziehungen können erst in der Rückschau thematisiert werden. Deshalb sind Beziehungen wichtig, die nicht direkt innermathematisch sind, sondern die Mathematik über die erlebte Wirklichkeit des Schülers verknüpfen (vgl. Freudenthal 1973, 75ff.).

Detailunterschiede in den Positionen von Klein und Freudenthal können durch die Verwendung von Metaphern bei Klein und Freudenthal illustriert werden. Während bei Klein Mathematik mit ihrem logischen Gerüst als Skelett beschrieben wird, steht bei Freudenthal „Skelett“ für die Wirklichkeit des Schülers. Dieses Skelett soll den mathematischen Kenntnissen des Schülers ihre Festigkeit geben und für Beziehungshaltigkeit sorgen:

> *„Will man zusammenhängende Mathematik unterrichten, so muss man in erster Linie die Zusammenhänge nicht direkt suchen; man muss sie längs der Ansatzpunkte verstehen, wo die Mathematik mit der erlebten Wirklichkeit des Lernenden verknüpft ist. Das – ich meine die Wirklichkeit – ist das Skelett, an das die Mathematik sich festsetzt, und wenn es erst scheinbar zusammenhangslose Elemente sein mögen, so erfordert es Zeit und Reifung, die Beziehungen zwischen ihnen zustande zu bringen.“* (Freudenthal 1973, 77)

Innermathematische Beziehungshaltigkeit ist für Freudenthal kein Selbstzweck. Auch die Nachhaltigkeit des Gelernten kann für ihn nicht das Endziel von Beziehungshaltigkeit im Mathematikunterricht sein. Das Ziel der Beziehungshaltigkeit ist ihre Wirkung auf den Werdegang der Wissenschaft im Allgemeinen und auf das Denken des einzelnen Individuums. In diesem Sinne ist die vergebliche Dreiteilung eines Winkels kein sinnloser Versuch, sondern ein wirksamer Schritt in der Entwicklung von Mathematik (vgl. Freudenthal 1973, 75ff.).

Als Zusammenfassung lassen sich folgende Aspekte von Beziehungshaltigkeit herausarbeiten:

- *Systematik ist Vollkommenheit der mathematischen Beziehungshaltigkeit.*
- *Beziehungshaltigkeit begünstigt das Verstehen und das Behalten des Gelernten.*
- *Beziehungen durch Analogieschlüsse haben im Mathematikunterricht den Vorrang vor logisch-deduktiven.*
- *Beziehungen können natürlich bzw. künstlich sein. Dies ist aus der Perspektive des Schülers zu beurteilen.*
- *Bei der Thematisierung von Beziehungen im Unterricht sind unterschiedliche Lernvoraussetzungen der Schüler zu berücksichtigen.*
- *Es gibt Beziehungen, die erst in der Rückschau sichtbar gemacht werden können.*
- *Das Ziel der Beziehungshaltigkeit des Mathematikunterrichts ist ihre Wirkung auf den Problemlöser.*

2.2.6 Wittmann und Vollrath: Integrationsprinzip und Mathematik zwischen System und Problemlösen

Die Idee der Beziehungshaltigkeit wurde in späteren didaktischen Ansätzen als modellbildendes Prinzip aufgenommen. Exemplarisch wird hier auf die didaktischen Ansätze von Wittmann und Vollrath eingegangen, um zwei unterschiedliche Positionen vorzustellen, die Beziehungshaltigkeit als ein didaktisches Phänomen kontrastreicher erscheinen lassen.

Die durch die Merkmale der Mathematik als Wissenschaftsdisziplin bei Wittenberg begründete Forderung nach Beziehungshaltigkeit im Unterricht nimmt Vollrath als Forderung nach authentischer Mathematik auf:

> *„Mathematik authentisch zu unterrichten beschränkt sich also nicht darauf, Begriffe und Sachverhalte zu lehren, sondern der Unterricht muss auch das mathematische Beziehungsgefüge herausstellen.“*(Vollrath 2001, 25)

Für Wittmann wird in Anlehnung an Freudenthal das Prinzip der Beziehungshaltigkeit zum Auswahlkriterium für Unterrichtsinhalte bei der Konstruktion von mathematischen Lernsequenzen (vgl. Wittmann 1980, 148). Sowohl Wittmann wie auch Vollrath beschreiben Beziehungshaltigkeit als eine zentrale Charakteristik von Mathematik und legitimieren somit ihre Beschäftigung damit. Darüber hinaus bemühen sich diese beiden Didaktiker um eine lernpsychologische Begründung für Beziehungshaltigkeit. In Anlehnung an die genetische Erkenntnistheorie und die Psychologie von Piaget beleuchtet Wittmann (1980, 59) in seinen „Grundfragen des Mathematikunterrichts" Elemente der Psychologie des Mathematiklernens. Eines der daraus abgeleiteten didaktischen Prinzipien wird bei ihm als Integrationsprinzip bezeichnet. Demnach kann das Individuum mit der Umwelt umso erfolgreicher in Wechselwirkung treten, je vollständiger und mobiler seine Erkenntnisse (Schemata) in „Beziehungsnetzen" integriert und organisiert sind. Man hat daher im Unterricht auf die Schaffung von Beziehungsnetzen und Sinnzusammenhängen hinzuarbeiten (Integrationsprinzip). Beziehungshaltigkeit ist für Wittmann lernpsychologisch legitimiert (vgl. Wittmann 1980, 77). Wittmann geht es aber nicht nur darum, durch das Integrationsprinzip Beziehungshaltigkeit zu begründen, sondern auch im Unterricht zu berücksichtigen:

> *„Die Integration soll bereits bei der Erarbeitung einer Erkenntnis einsetzen (Prinzip des Lernens in Zusammenhängen). In großem Maßstab kann in eigens angesetzten Wiederholungsstunden integriert werden (Prinzip der integrierenden Wiederholung). Die integrierende Wiederholung ist aufzufassen als Wiederaufnahme eines Lernprozesses."* (Wittmann 1980, 77)

Diese zwei Aspekte der Beziehungshaltigkeit finden sich bei Vollrath als Überleitung zwischen dem Gelernten und dem Einzuführenden und der Rückschau auf das Gelernte. Dass rückblickende Betrachtungen im Unterricht vernachlässigt werden, bemerkte seinerzeit Wittenberg (vgl. 1963, 147). Auch Wittmann sieht dies als Mangel an und geht in seinen Vorschlägen deshalb so weit, dass er im Integrationsprinzip und seinen Unterprinzipien eine Abkehr von traditionellen Unterprinzipien wie „Isolierung der Schwierigkeiten", „linearer Aufbau" und „Lernen in kleinen und kleinsten Schritten" propagiert (vgl. Wittmann 1980, 77f.).

Anders ist die Position von Vollrath (2001), der die Einteilung der Unterrichtsinhalte in Abschnitte und Lerneinheiten explizit befürwortet. Er heißt sie sogar im Interesse des Schülers willkommen. Denn der Schüler, so Vollrath, freut sich auf die Themenabwechselung, durch die er immer wieder eine neue Chance bekommt, einen anderen Zugang zur Mathematik zu finden (vgl. Vollrath 2001, 60).

Aus den Erkenntnissen der Kognitionspsychologie (vgl. Anderson 2001) leitet Vollrath in einem weiteren Schritt ab, dass die Reichhaltigkeit oder Elaboriertheit von Begriffen ebenfalls das Behalten fördern kann. Dies geschieht auch dann, wenn Verbindungen im Sinne von „Eselsbrücken" „künstlich" sind. Diese mnemotechnische Funktion von Beziehungshaltigkeit im Sinne eines besseren Behaltens wurde bereits bei Freudenthal erwähnt. Sie wird später bei Brinkmann (2002, 94) als „mnemotechnische Vernetzung" bezeichnet. Zugleich bemerkt jedoch Vollrath, dass das Anreichern von Wissen das

Behalten und den Abruf von Information auch beeinträchtigen kann. Diese Bemerkung weist auf die mit der Beziehungshaltigkeit verbundenen Gefahren hin. Im Falle der Mathematik kommt hinzu, dass benötigte Informationen auch durch Schließen ergänzt werden können. So kann beispielsweise die Formel zum Lösen von quadratischen Gleichungen zur Not auch erneut hergeleitet werden, wenn die Erinnerungen verblassen (vgl. Vollrath 2001, 60f.).

Bedenkt man, dass Vollrath das Lernen von Mathematik und das Forschen in der Mathematik als Problemlösen auffasst, so erhält die Beziehungshaltigkeit eine weitere Bedeutung:

> *„Beim Lösen eines Problems besteht der entscheidende Schritt meist darin, dass eine Beziehung zu einem bereits gelösten Problem oder zu bekannten Sachverhalten erkannt wird. Ist ein Problem gelöst, dann werden durch die Lösung meist neue Probleme aufgeworfen. Den Problemlösern erschließt sich Mathematik als ein Beziehungsgefüge. Dafür wird das Bild eines Netzes gebraucht. Knoten stehen dabei für Begriffe, Sachverhalte und Verfahren, die Maschen für Beziehungen zwischen ihnen. Auch dies lässt sich unter dem Aspekt der Wissenschaft und des Lernens sehen: Beim Entstehen von Mathematik bildet sich zunächst ein Netz von Erkenntnissen aus, die erst in einer fortgeschrittenen Phase systematisch geordnet werden. Entsprechendes gilt auch für die Lernenden.“* (Vollrath 2001, 64)

Die Systematik als ein Ergebnis von Problemlöseprozessen kommt erst in einer relativ späten Phase der Denk- und Forschungsprozesse hinzu. Wichtig dabei ist, dass gelöste Probleme zu neuen noch unbekannten Problemen führen und das Netz somit nie dicht bzw. für das Entstehen von neuen Beziehungen offen ist.

Ergebnisse der Kognitionspsychologen (vgl. Anderson 2001) rezipierend, geht Vollrath davon aus, dass Wissen über mathematische Sachverhalte nicht einfach angehäuft, sondern verbunden und in Netzwerken hierarchisch organisiert wird. An einer späteren Stelle der Arbeit werden weitere Parallelen zwischen Vollraths Rezeption und Integration kognitionspsychologischer Erkenntnisse und der Arbeit von Brinkmann erkennbar (vgl. 2.3.2).

Während Wittmann die Abkehr vom „linearen Aufbau“ des Unterrichts propagiert, konstatiert Vollrath (1984, 178) ein pädagogisch widersprüchliches Verhältnis zwischen dem Anliegen, Begriffsnetze im Unterricht zu erschließen, und dem linearen Ablauf des Unterrichts. Dabei beruft er sich auf Aebli, der den Widerspruch folgendermaßen beschreibt:

> *„Ein weiteres Problem ergibt sich aus der Tatsache, dass die Abfolge der Teilschritte einer Erklärung oder eine gemeinsam mit den Schülern vollzogene Entwicklung die Form einer Kette, also eines linearen Prozesses hat, während das Ergebnis ein Netz darstellt. Der Erklärer muss das Netz der Beziehungen wie eine Spinne aus einem einzigen Faden weben. Dabei ist es dem Schüler nicht möglich, in jedem Moment das ganze bisher gewobene Netz in seinem Geiste präsent zu halten. Unmittelbar*

> *gegenwärtig sind ihm die Beziehungen, die er zuerst aufgebaut hat. Die Erklärung muss daher immer wieder zu den Punkten zurückkehren, an denen sie ein Element stehen gelassen hat, es erneut aufnehmen und von da aus weiterspinnen. Dies aber setzt voraus, dass das stehen gelassene Element noch vorhanden und in tunlicher Frist wieder vergegenwärtigt werden kann. Das erfordert, dass es in einem gewissen Maße konsolidiert worden ist. Daraus folgt, dass Teilergebnisse bewusst festgehalten und eingeprägt werden müssen.“* (Aebli 1977, 203)

Auch dieses Zitat beschreibt unter didaktisch-methodischen Aspekten die Widersprüchlichkeit zwischen der Linearität des Unterrichtsgeschehens als Kette und dem Beziehungsreichtum des Wissens als Netz. Der Erklärer oder Lehrer wird in dem Fall mit der Metapher einer Spinne umschrieben, der aus einer linearen Darstellung, einem Faden, ein Netz flicht und das Wissen beziehungshaltig darzustellen versucht. Da es für den Schüler nicht möglich ist, alle Zusammenhänge auf einmal zu erfassen, ist dem Einprägen von Teilergebnissen oder „isolierten Brocken“ im Unterricht kaum auszuweichen.

Der Umgang mit diesem widersprüchlichen pädagogischen Verhältnis ist bei Vollrath in vier Aspekten des Lernens von Mathematik möglich: systemorientiert, problemorientiert, reflektierend und langfristig. Hinter diesen Aspekten verbergen sich nach Vollrath zwei verschiedene Sichtweisen von Mathematik. Demnach ist Mathematik zunächst ein System. Diese Sichtweise wird bei Vollrath in Anlehnung an Wagenschein metaphorisch als „Turm“ dargestellt. Lietzmann spricht in dem Zusammenhang von einem Haus. Das System ist stabil und statisch. Eine andere Sichtweise auf Mathematik ist durch Problemlösen bestimmt. Diese verschiedenen Sichtweisen können auf einer Metaebene im Mathematikunterricht reflektiert und langfristig berücksichtigt werden. Sie ergänzen sich somit gegenseitig (vgl. Vollrath 2001, 45ff.).

Die Reflexion auf einer Metaebene setzt das Lösen von Problemen im Mathematikunterricht voraus. Beim Lösen von Problemen sollte nach Wittmann Folgendes berücksichtigt werden:

> *„Eine Konfrontation der Schüler mit neuen Inhalten und neuen Fragestellungen soll über Situationen erfolgen, bei denen nur einzelne Elemente oder Aspekte wirklich neu sind, ansonsten aber möglichst reichhaltige Ansatzpunkte für eine Anwendung bekannter Schemata vorliegen.“* (Wittmann 1980, 78)

Verbindung des jeweiligen mathematischen Inhalts mit anderen, auch außermathematischen Themenkreisen wird neben *Zuordnung*, *Reihenfolge* und *Akzentuierung* bei Vollrath (1976) darüber hinaus zu einer methodischen Variablen, die methodische Entscheidungen bei Planung und Gestaltung des Unterrichts erfordert (vgl. Hischer 1998, 3ff.).

Ergänzend zu den bereits beschriebenen Merkmalen mathematischer Beziehungshaltigkeit und Prinzipien eines beziehungshaltigen Mathematikunterrichts lassen sich folgende Punkte formulieren:

- *Beziehungshaltigkeit soll Behalten und Abrufen von Informationen erleichtern, kann diese aber auch erschweren.*
- *Linearer Aufbau des Unterrichts und Netzcharakter der Mathematik erscheinen in einem Spannungsverhältnis.*
- *Beziehungen entstehen im Unterricht durch Mathematik als System und Mathematik als Problemlösen. Sie weisen somit unterschiedliche Qualitäten auf.*
- *Eine Verbindung der Inhalte zählt zu den methodischen Variablen und erfordert methodische Entscheidungen.*

2.3 „Vernetzungen“ in den aktuellen mathematikdidaktischen Diskussionen

Im Folgenden werden verschiedene Definitionsversuche des Begriffs „Vernetzung“ sowie einige Begriffe mit dem gleichen Wortstamm untersucht. Das Ziel ist dabei einerseits, an die didaktische Diskussion um Beziehungshaltigkeit anzuknüpfen, andererseits eine Brücke zu aktuellen didaktischen Ansätzen und bildungspolitischen Forderungen hinsichtlich von Vernetzungen zu schlagen. Dafür werden vor allem Vorschläge von Kießwetter (vgl. 2.3.1), Brinkmann (vgl. 2.3.2) und Hischer (vgl. 2.3.3) vorgestellt und miteinander verglichen. Auf eine explizite Arbeitsdefinition wird zugunsten einer Zusammenfassung verschiedener Gesichtspunkte von Vernetzungen in der Mathematik verzichtet. Diese am Ende des Kapitels herausgearbeiteten Aspekte der Vernetzung sollen einerseits den theoretischen Rahmen der Arbeit stützen, andererseits Hinweise zur Konstruktion von Unterrichtsvorschlägen geben.

2.3.1 Kießwetter: Vernetzung als Leitidee des Mathematikunterrichts

Mit Verweis auf „lokales Ordnen“ nach Freudenthal (vgl. 2.2.4) sieht Kießwetter Vernetzung als eine unverzichtbare Leitidee des Mathematikunterrichts:

> *„Unverzichtbar sind Vernetzungen der Wissenselemente, von Verhaltens- und Handlungsmusterbausteinen, von sozialen und motivationalen Einbindungen mit- und untereinander in der Mathematik, wenn man diese primär als produktiven Prozess versteht, bei dem es ja u.a. um die Lösung von Problemen geht.“* (Kießwetter 1993, 5)

Dass dieses Zitat keine explizite Definition der Vernetzung liefert, hat seinen Grund unter anderem in der Auffassung Kießwetters vom Definieren. Er unterscheidet zwischen den in der Mathematik häufiger vorkommenden expliziten „Monodefinitionen" und „Definitionen durch Vernetzung". Die sogenannte Vernetztheit des Wissens wird somit auch für Kießwetter zum charakteristischen Merkmal der Mathematik. Zu vernetzen sind vor allem „Wissenselemente", „Verhaltens- und Handlungsbausteine". Die zweite Besonderheit der Definition besteht darin, dass Kießwetter nicht nur mathematisches Wissen, sondern auch „soziale und motivationale Aspekte" von Vernetzungen explizit anspricht. Schließlich werden im Hinblick auf das Problemlösen zwei Vernetzungsarten, die erste eher statisch und die zweite eher dynamisch, unterschieden.

Dahinter steht eine Auffassung von Mathematik, die ähnlich wie bei Freudenthal (vgl. 2.2.5) und Vollrath (vgl. 2.2.6) zwischen Mathematik als System und Mathematik als Prozess unterscheidet. Während Mathematik als System sich vor allem in Vorlesungen widerspiegelt, zeigt sich Mathematik als Prozess in der mathematischen Forschung. Ähnlich wie Vollrath lehnt Kießwetter Mathematik als System und somit Portionierung des Wissens durch den Lehrer nicht ab, auch wenn das im Widerspruch mit Mathematik als Prozess zu stehen scheint.[18] Dies ist nach Kießwetter für den Lehrer mit den Risiken von offenen und komplexen Situationen und Anforderungen verbunden. Sie beinhalten die Fähigkeit des Lehrers, „umfangreiche und vielbezügliche Vernetzungen zu allen Gegenständen" (vgl. Kießwetter 1993, 7), die er im Unterricht behandelt, herzustellen. Das übliche Mathematikstudium für Lehrer reicht Kießwetter zufolge dafür nur in einem geringen Maße aus. Daraus folgt, dass Veränderungen der schulischen Praxis in Bezug auf Vernetzung als Leitidee des Mathematikunterrichts nur in Kooperation mit Lehrern, wie Winter bemerkte (vgl. 2.1.2), und mit Hilfe von Lehrerfortbildungen, wie Klein versuchte (vgl. 2.2.1), erzielt werden können. Die Problematik der Vernetzung wird durch den übermäßigen Einfluss von Klassenarbeiten, 45-Minutentakt und das Bestreben, am Ende der Stunde ein unmittelbar überprüfbares Lernergebnis zu sehen, erschwert (vgl. Kießwetter 1993, 7).

Weitere Schwierigkeiten, auf die Kießwetter eingeht, bestehen in der Begrenztheit des menschlichen Gehirns, zweitens in der Linearität von Zeit und der Linearität menschlicher Sprache und die Begrenztheit der zweiwertigen Logik. Demnach ist die Vernetzungsproblematik laut Kießwetter prinzipiell nicht lösbar. Danach sind Mathematiklehrer darauf angewiesen, ihren Unterricht zwischen den Polen

- *Klarheit durch Trennung der Wissenselemente und*
- *Verwirrung der Schüler durch Thematisierung von Vernetztheit des mathematischen Wissens*

zu gestalten (vgl. Kießwetter 1993, 7, Kießwetter, 1994, 3).

[18]Der Widerspruch hebt sich auf, wenn der Aufbau eines Systems als Prozess interpretiert wird.

Kießwetter (1993, 1994) äußert seine Vorstellungen über mathematische Vernetzungen im Kontext von Modellierungs- und Problemlöseprozessen. Um Problemlöseprozesse zu beschreiben, entwickelt er ein schematisch dargestelltes Modell (vgl. Kießwetter 1991, 96).

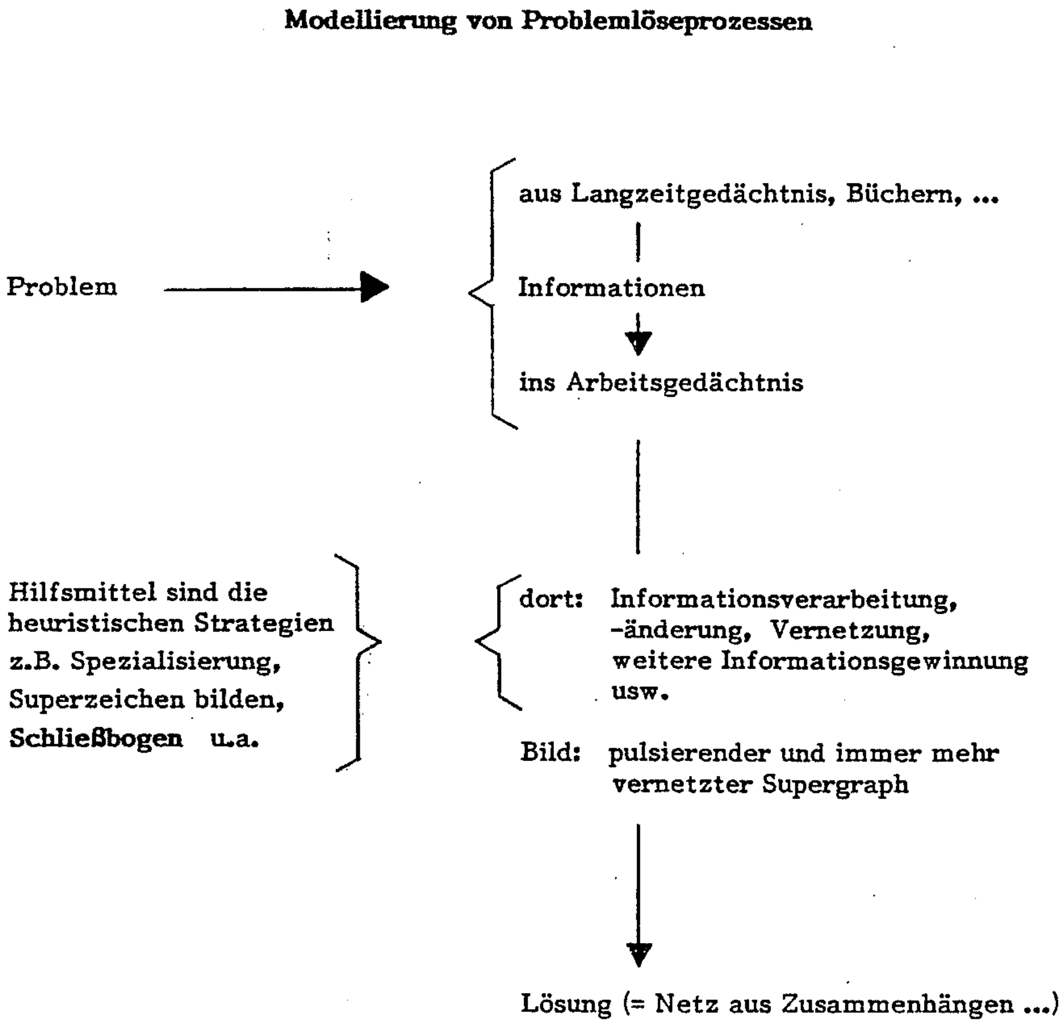


Abbildung 2.4: Problemlöseprozess nach Kießwetter (1991, 96)

Nach diesem Modell werden die für das Lösen eines Problems erforderlichen Informationen aus dem Langzeitgedächtnis geholt, um im Arbeitsgedächtnis u.a. durch Vernetzung verarbeitet zu werden. Diese Prozesse werden mit Hilfe eines „pulsierenden und immer mehr vernetzten Graphen“ dargestellt (siehe Abb. 2.4). Die Lösung eines Problems wird dann als „Netz von Zusammenhängen“ beschrieben. Im Kontext der Informationsverarbeitung werden Problemlöseprozesse in zwei Phasen eingeteilt. Die erste Phase beinhaltet die Repräsentation eines Problems. Die zweite Phase wird der Lösungssuche, in dem aufgebauten Problemraum als Repräsentation des jeweiligen Problems zugeordnet. Die sogenannte „repräsentative Vernetzung“ nach Kießwetter ist vor allem für den ersten Schritt des Problemlöseprozesses, dem Aufbau eines Problemraumes, von Bedeutung. Die Vielfalt von verschiedenen Repräsentationen und der leichte Wechsel zwischen ihnen sind dabei, wie Kießwetter behauptet, von Vorteil (vgl. Kießwetter 1994a, 42ff.).

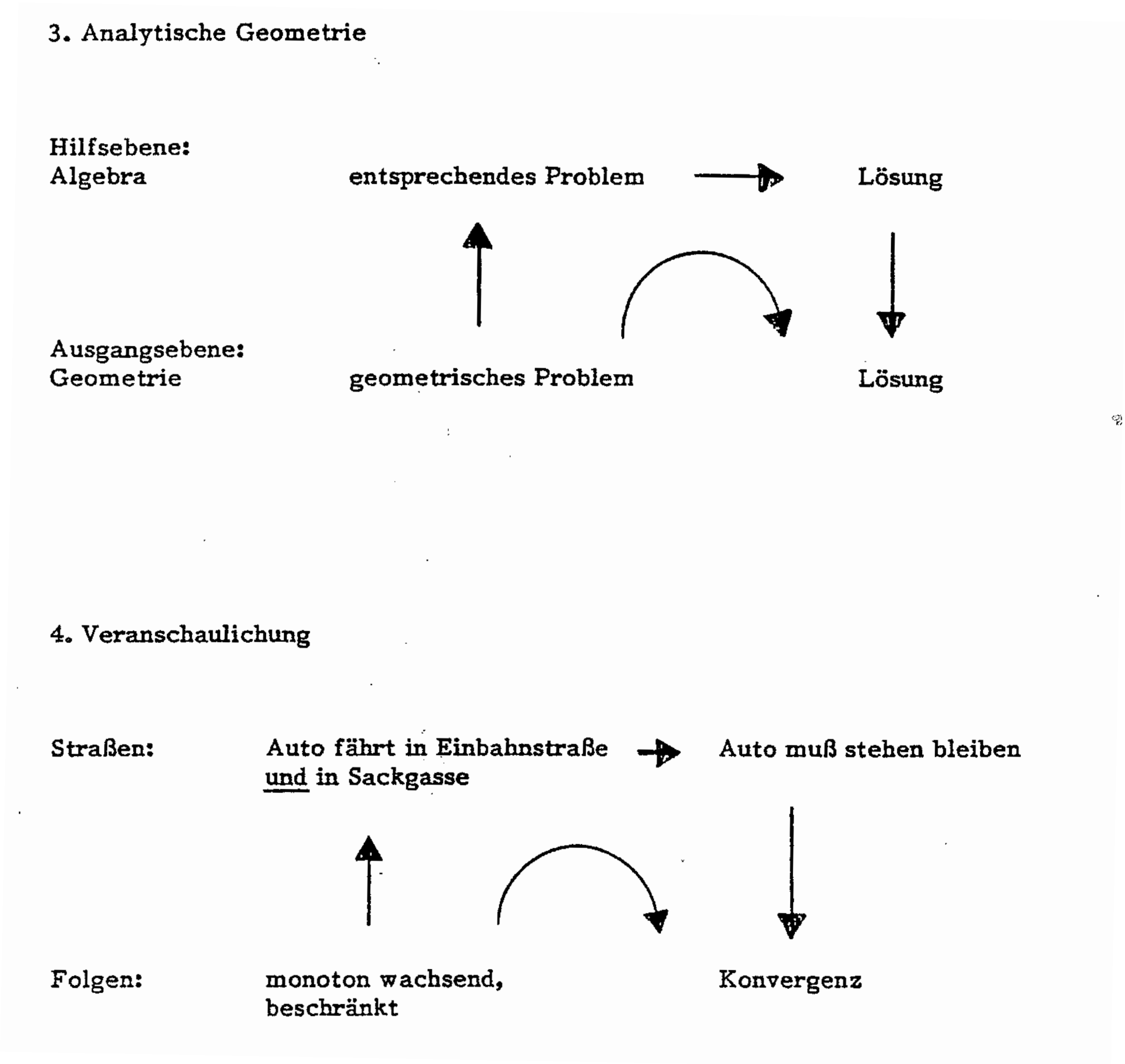


Abbildung 2.5: Schließbögen nach Kießwetter (1996, 98)

Dieses Modell des Problemlösens wird anschließend bei Kießwetter an verschiedenen Beispielen illustriert. Im Hinblick auf die Zielstellung der vorliegenden Arbeit werden hier zwei Beispiele (siehe Abb. 2.5) vorgestellt, weil sie das Schließen einer Lücke im mathematischen Wissen zum Ziel haben. Im Beispiel 3 geht es darum, ein geometrisches

Problem mit den Hilfsmitteln der Algebra zu lösen.[19] Im Beispiel 4 wird ein mathematisches Konzept von Folgen durch einen außermathematischen Bezug auf Straßen veranschaulicht. So treten einerseits Algebra und außermathematische Bezüge andererseits zu den Hilfsebenen, in denen Mathematik durch Übertragung in andere Bereiche vernetzt wird (vgl. Kießwetter 1991, 98).

2.3.2 Brinkmann: Kategorien von Vernetzungen

Brinkmann[20] greift die Ideen von Kießwetter (vgl. Brinkmann 2002, 21, 49) in ihrer Dissertation auf. Im Folgenden werden Begrifflichkeiten und Kategorien der Vernetzung nach Brinkmann (2002) vorgestellt. Gleichzeitig werden diese Aspekte mit Rückblick auf bildungstheoretischen Überlegungen (vgl. 2.1) und Ausführungen zu den historischen Entwicklungen (vgl. 2.2) und im Hinblick auf die Entwicklung von Aufgabennetzen (vgl. 2.5, 4) reflektiert.

Begriffliches

In Anknüpfung an systemtheoretische Begrifflichkeiten von Vester (1985, 1992, 2002 usw.) und Ideen von Fischer (1993a) versucht Brinkmann eine explizite Definition von Vernetzungen im Mathematikunterricht aufzustellen. Dabei schlägt sie ausgehend von der Netzwerkstruktur mathematischen Wissens vor, Vernetzungen mit Hilfe von Graphen aus Knoten und Kanten zu modellieren (vgl. Brinkmann 2002, 34):

> *„Inhaltlich interpretiert, repräsentieren die Knoten mathematische Objekte oder auch nicht-mathematische Objekte/Dinge, die mit mathematischen Objekten in Beziehung stehen; die Kanten zeigen existierende Beziehungen (Relationen) auf. Solche Relationen lassen sich als Vernetzungen definieren.“* (Brinkmann 2009, 163)[21]

Mit mathematischen Objekten sind Begriffe, Lehrsätze, Beweise, Algorithmen, Formeln oder Terme gemeint (vgl. Brinkmann 2002, 34). Diese Objekte entsprechen wiederum den Wissenselementen bei Kießwetter (vgl. 2.3.1). In diesem Sinne können beispielsweise Begriffe durch Oberbegriffsrelationen miteinander vernetzt sein.

Im Rückblick auf die Ideen von Lietzmann (vgl. 2.2.1) ist bemerkenswert, dass Brinkmann ebenso den Satz des Pythagoras zur Illustration ihrer Definitionen wählt. Dabei konzentriert sie sich im Gegensatz zu Lietzmann auf visuell-graphische Darstellungen und nicht auf Aufgabenbeispiele. In der Abbildung 2.6 wird gezeigt, wie die

[19] Die Nummerierung der Beispiele erfolgt nach Kießwetter (1991, 98).

[20] Nach Schupp sollen von Brinkmann vorgeschlagene *Concept Maps* und *Mind Maps* helfen, Schülervariationen zu strukturieren und zu ordnen (vgl. Schupp 2002, 22f.).

[21] Bruder und Brückner (1989, 77) sprechen von Inbeziehungsetzen von Teilen mit Feststellen der Identität und Unterschiedlichkeit der untersuchten Teile eines Ganzen, um Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht zu beschreiben.

einzelnen Elemente des Satzes des Pythagoras als ein Netzwerk repräsentiert werden können.

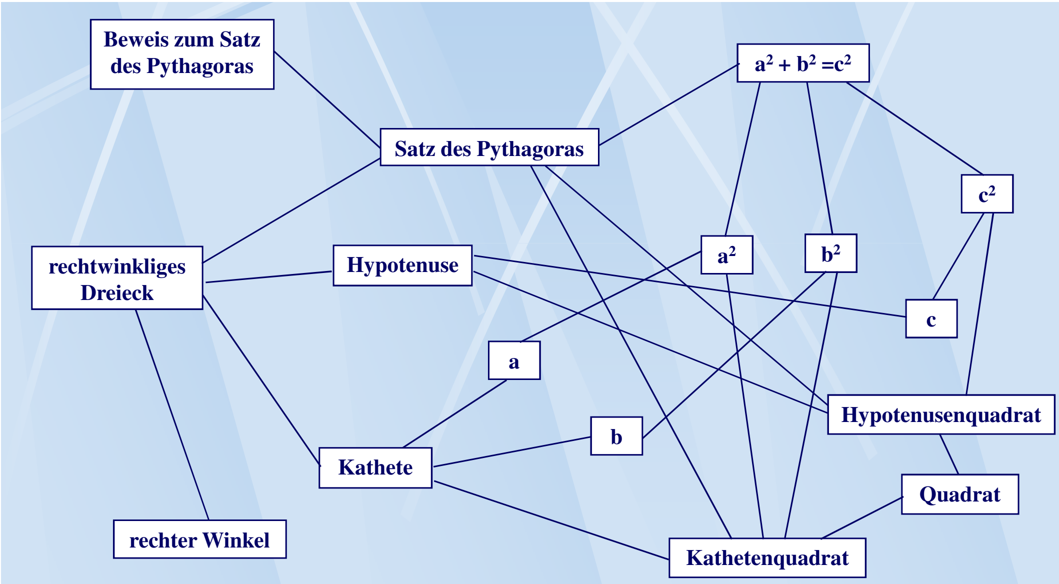


Abbildung 2.6: Vernetzungen im Satz des Pythagoras bei Brinkmann

Die gewählten Begrifflichkeiten werden von Brinkmann (2010, 8) prägnant in einer tabellarischen Darstellung zusammengefasst. Darin wird deutlich, wie ihre Begriffe einerseits mit den „vernetzen Systemen" von Vester (1993), andererseits mit Gegenständen des Mathematikunterrichts zusammenhängen (siehe Abb. 2.7). Während die Komponenten eines „vernetzten Systems" durch „Verbindungen" oder „Abhängigkeiten" zusammenhängen, werden „Relationen" oder „Verbindungen" zwischen zwei Objekten nach Brinkmann als „Vernetzungen" bezeichnet. Demzufolge werden bei Brinkmann Vernetzungen durch Kanten graphentheoreitsch modelliert.

Vernetztes System	Mathematische Modellierung: Graph	Inhaltliche Interpretation
Komponenten	Knoten	Mathematische Objekte, nicht-mathematische Komponenten
Verbindungen; Abhängigkeiten	Kanten (gerichtet, ungerichtet)	Relation = Vernetzung (einseitig, wechselseitig)

Abbildung 2.7: Definition von Vernetzung

Bei der Beschreibung von Vernetzung als „Prozess“ und als „Ergebnis“ des „in Relation Setzens“ (vgl. Brinkmann 2002, 36) wird in der Arbeit auf Fischer (1991, 121) verwiesen. Er ist als Mathematikdidaktiker vor allem durch sein Buch „Mensch und Mathematik“ (1985) bekannt geworden, aber auch als Wissenschaftsforscher und Dekan der Fakultät für Interdisziplinäre Forschung und Fortbildung (IFF) der Alpen-Adria Universität Klagenfurt, die Vertreter verschiedener wissenschaftlicher Disziplinen vereint. Die Arbeiten zum Thema Vernetzung von Fischer und seinen Kollegen werden deshalb im Kapitel 3 der vorliegenden Arbeit bei der Weiterentwicklung von theoretischen Konzeptionen herangezogen.

Kategorien der Vernetzung

Die Klassifikation in fachsystematische und anwendungsbezogene Vernetzungen bezieht sich auf die kognitive Ebene des Schülers und die Ebene des Unterrichtsstoffes. Die Kategorien der Klassifikation überschneiden sich teilweise mit den von Kießwetter angesprochenen Aspekten. Brinkmann (2002, 42ff.) unterscheidet in ihrer Klassifikation zwischen Vernetzungen innerhalb der Mathematik als sogenannten innermathematischen Vernetzungen, und Vernetzungen von Mathematik mit nicht mathematischen Bereichen, die im Folgenden „außermathematisch“ genannt werden. Beide Vernetzungsarten werden inhaltlich noch weiter untergliedert (siehe Abb. 2.8).

Innermathematische Vernetzungen werden noch feiner in fachsystematische und anwendungsbezogene unterteilt. Bei den anwendungsbezogenen Vernetzungen geht es Brinkmann um die Anwendung von Mathematik auf die Lösung von Aufgaben und Problemen. An dieser Stelle ist der Bezug zu Kießwetter sehr stark (vgl. Brinkmann 2002, 49ff.). Bei der Beschreibung von fachsystematischen Vernetzungen bezieht sich Brinkmann auf auf drei Aspekte der Mathematik als Fachwissenschaft betrachtet:

- *Einteilung der Mathematik in verschiedene Inhaltsbereiche bzw. Gebiete;*
- *Systematisierung der Mathematik durch Bourbaki nach mathematischen Strukturen;*
- *Deduktives Gerüst der Mathematik.* (vgl. Brinkmann 2002, Brinkmann, Maaß, Ossimitz, Siller 2010, 12ff.)

Entsprechend diesen Aspekten werden fachsystematische Vernetzungen bei Brinkmann in *Hierarchie-*, *deduktive* und *Strukturvernetzungen* eingeteilt und mit Hilfe von Beispielen beschrieben. Eine Umfrage zum Satz des Pythagoras hilft Brinkmann, ihre Begrifflichkeiten zu veranschaulichen (siehe Abb. 2.9).

Wie lässt sich die Einteilung in fachsystematische und anwendungsbezogene Kategorien der Vernetzungen im Mathematikunterricht vor dem Hintergrund des Konzeptes von Beziehungshaltigkeit und Vernetzungen bei Kießwetter einordnen? Die in der Einteilung von Brinkmann angedeuteten Aspekte der Mathematik lassen sich auch in den von

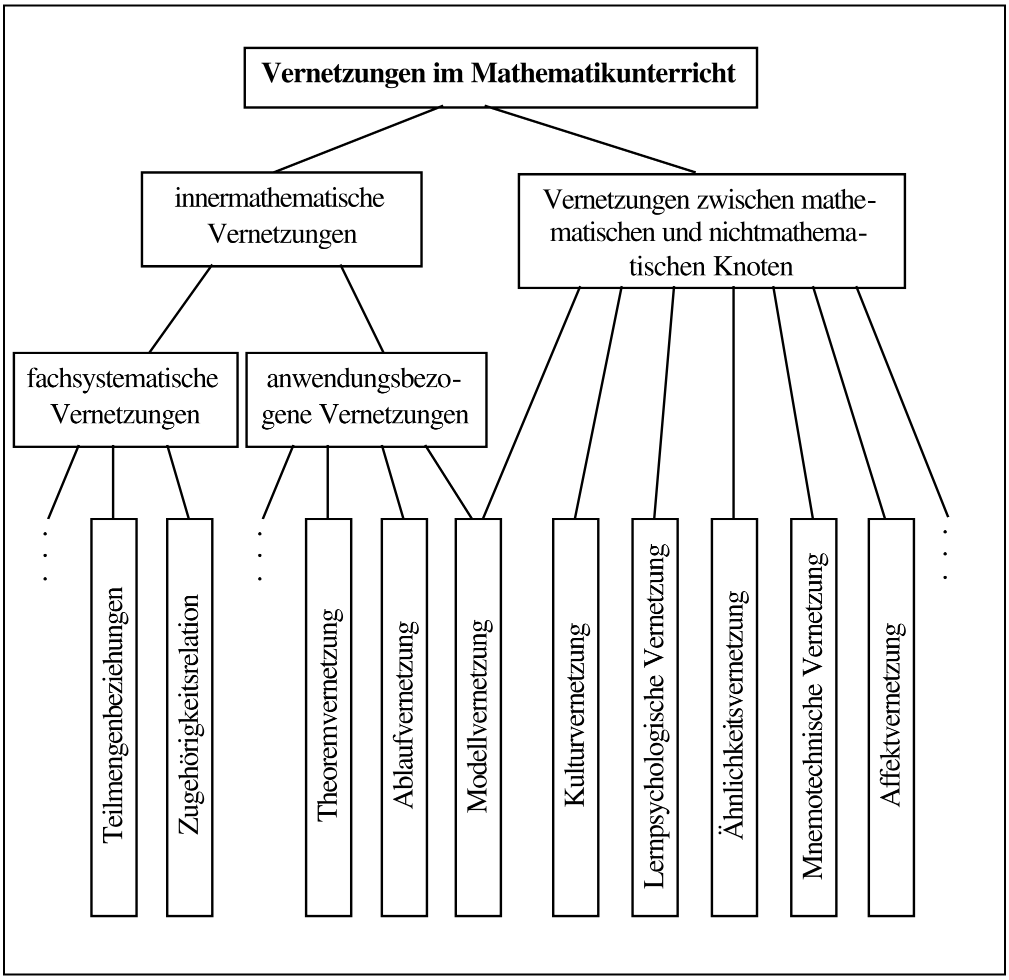


Abbildung 2.8: Kategorien von Vernetzungen nach Brinkmann (2002, 65)

früheren Didaktikern wahrgenommenen und beschriebenen Qualitäten innermathematischer Beziehungshaltigkeit bzw. innermathematischen Vernetzungsreichtums erkennen. Mathematik als System und logisch-deduktive Wissenschaft einerseits und Mathematik als Prozess und Problemlösen andererseits wurden in der Didaktik der Mathematik teils als widersprüchliche, teils als sich ergänzende Sichtweisen wahrgenommen (vgl. 2.2, 2.3.1).

- So empfiehlt beispielsweise Klein im Rahmen der Fusion mathematischer Gebiete nicht nur systematische und logische, sondern anschauliche und anwendungsbezogene Aspekte der Mathematik beim Aufbau von Lehrgängen zu betonen (vgl. 2.2.1).

- Lietzmann unterscheidet zwischen logisch-deduktiven und anschaulichen Vorgehensweisen im Unterricht, die arithmetische und geometrische Methoden ver-

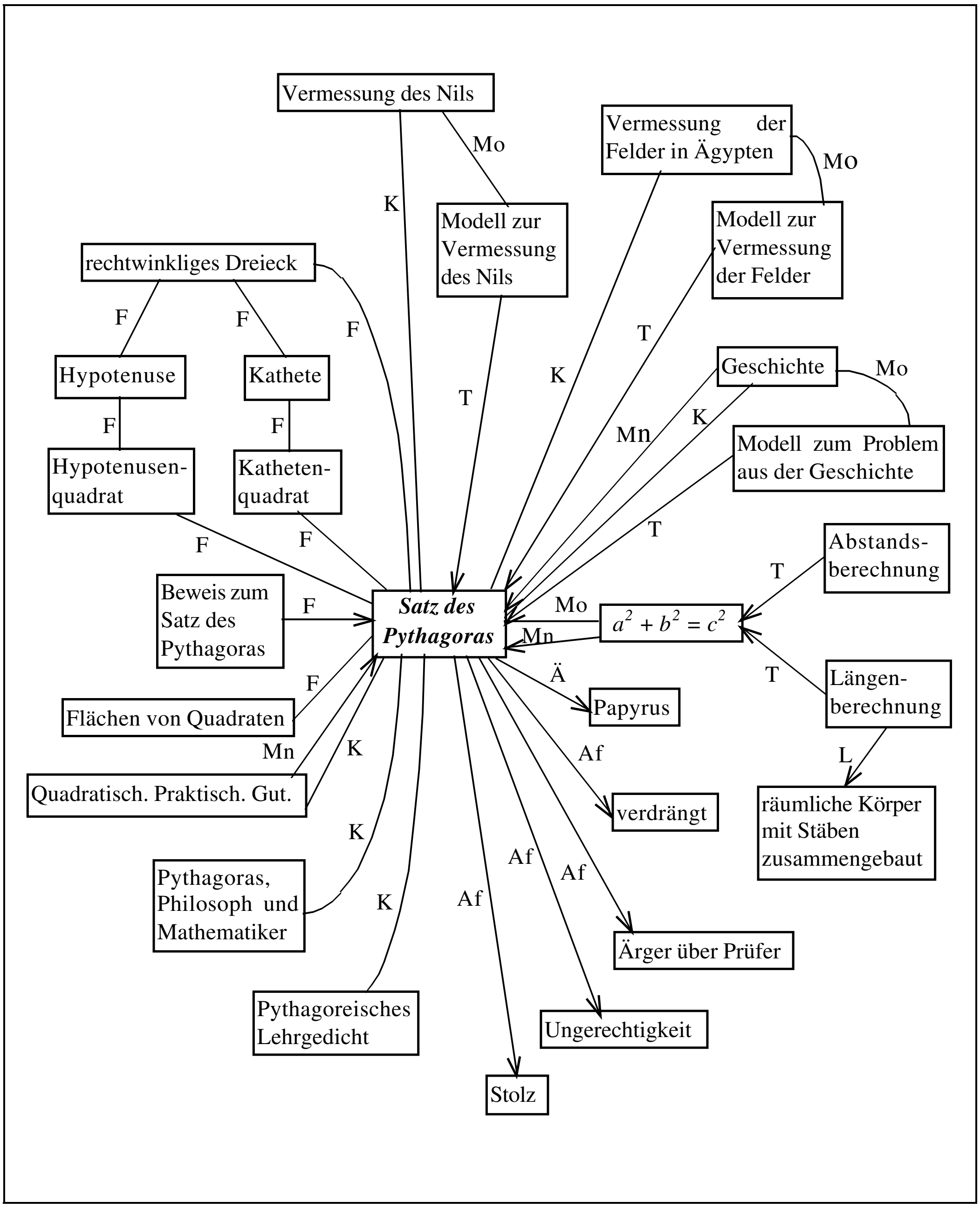


Abbildung 2.9: Vernetzungen am Beispiel des pythagoreischen Satzes nach Brinkmann (2002, 66)

mischen. Er beschreibt logisch-deduktive Beweise mit der Metapher einer Kette und anschauliche Beweise mit der Metapher eines Netzes. Um die Einteilung der Mathematik in Gebiete zu beschreiben, gebraucht er das Bild eines Hauses mit verschiedenen Zimmern. Um ihre Lebendigkeit durch Existenz offener Probleme zu beschreiben, benutzt er das Bild eines Baumes (vgl. 2.2.3).

- Freudenthal sieht in dem mathematischen System die höchste Form der Beziehungshaltigkeit. Er erkennt jedoch an, dass Mathematik als System vor allem denjenigen Schülern zugänglich sein soll, die später mathematikbezogene Berufe ergreifen. Bei allen anderen Schülern sollen anwendungsbezogene Beziehungen betont werden. Darunter sind vor allem inner- und außermathematische Analogien gemeint (vgl. 2.2.5).
- Winter konkretisiert innermathematische Vernetzungen als deduktive Vernetzungen vor allem innerhalb der Geometrie, aber ausgehend davon auch in anderen Gebieten. Er hebt aber auch die Bedeutung innermathematischer Vernetzungen für das Problemlösen als Möglichkeit hervor, Lösungen und Lösungsschritte zu kontrollieren (vgl. 2.1.2).
- Wittmann empfiehlt das Formulieren von neuen Problemen in bekannten Kontexten und deren Konkretisierung anhand von Alltagserfahrungen (vgl. 2.2.6).
- Vollrath unterstreicht das Lernen von Mathematik als systemorientiert, problemorientiert, reflektierend und langfristig. Bei der Beschreibung von problemorientiertem Mathematiklernen verwendet er das Bild eines Netzes (vgl. 2.2.6).
- Kießwetter sieht Vernetzung als Leitidee des Mathematikunterrichts im Spannungsfeld zwischen Mathematik als System und Mathematik als Prozess. Dabei sieht er in Gebiete eingeteilte und linear aufgebaute Mathematik als System im Zusammenhang mit der Lehre und Mathematik als Prozess im Zusammenhang mit der Forschung. Beide Aspekte der Mathematik sind in der Schule von Bedeutung (vgl. 2.3.1).

Während es Klein und Lietzmann eher um die Konstruktion von schulrelevante Beispielen, Wittenberg, Winter, Wittmann und Vollrath darüber hinaus um eine didaktische und pädagogische Einordnung und Begründung von Beziehungshaltigkeit und Kießwetter um eine implizite Beschreibung von Vernetzungen als Teil mathematischer Problemlöseprozesse geht, möchte Brinkmann eine explizite Definition von Vernetzungen im Mathematikunterricht anbieten. Diese Explikation und eine graphentheoretische Modellierung helfen, daran anschließende empirische Erhebungen zu strukturieren und sind mit den vorgeschlagenen Diagnose- und Unterrichtsmethoden konsistent.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der Ausarbeitung von Gestaltungsprinzipien für *Aufgabennetze*, die im Wechsel von theoretischer Weiterentwicklung und praktischer Erprobung erfolgt. Deshalb ist für die vorliegende Arbeit weniger eine explizite Definition von Vernetzung hilfreich, sondern die von Brinkmann aufgestellten Vernetzungskategorien. Diese beschreiben mathematische Vernetzungen oder Beziehungen qualitativ und helfen, bereits existierende im Zusammenhang mit Beziehungshaltigkeit aufgekommene Vorschläge zu strukturieren. Daraus können wiederum Gestaltungsprinzipien für Praxisvorschläge und Kriterien für deren Reflexion abgeleitet werden.

Die von Brinkmann (2002, 49ff.) vorgeschlagenen Kategorien der innermathematischen anwendungsbezogenen Vernetzungen können den beiden Phasen des Problemlöseprozesses, wie sie im Rahmen des Informationsverarbeitungsansatzes beschrieben werden, zugeordnet werden. So beziehen sich Modellvernetzungen vor allem auf die Darstellung des Problems bzw. das Verstehen der Fragestellung und Übersetzung in die Sprache eines Modells. Regel-, Theorem- und Ablaufvernetzung sind vor allem beim Ausdenken und der Ausführung einer bestimmten Lösungsmethode relevant. Sie bleiben oft im Rahmen eines begrenzten mathematischen Bereiches (vgl. Dörner 1987, 7ff.; Anderson 2001, 241ff.; Arbinger 1997, 31ff.).

Modellvernetzung ergibt sich laut Brinkmann aus der Anwendung von Modellen und kann als Relation „entspricht“, „ist eine Modellierung von“, „dargestellt als“, „beschrieben durch“ aufgefasst werden. Diese Kategorie wird bei Kießwetter (vgl. 2.3.1) als „repräsentative Vernetzung“ bezeichnet (vgl. Brinkmann 2002, 50ff.). Innermathematische Modellvernetzungen werden bei Brinkmann mit Hilfe der Metapher des „Übersetzens“ beschrieben: In einem mathematischen Modell formulierte Probleme oder ihre Teile werden in die Sprache eines anderen Modells übersetzt mit dem Ziel, diese zu lösen. Sie können beispielsweise als „Geometrisierung“ oder „Algebraisierung“ bezeichnet werden. Im Unterricht können auch Mischformen von diesen Vernetzungsarten auftreten (vgl. Brinkmann 2002, 42ff.).

Konkrete Beispiele für Modellvernetzungen oder für repräsentative Vernetzungen finden sich bereits in den Texten von Klein und Lietzmann, wie in 2.2 gezeigt wurde. Im Sinne stoffgebiets- und bereichsübergreifender Vernetzungen kommt innermathematischen Modellvernetzungen in der vorliegenden Arbeit eine wichtigere Bedeutung zu. Sie werden deshalb in 2.5 und 3.2 erneut aufgegriffen. Bedingt durch die Vorschläge von Freudenthal und Wittenberg (vgl. 2.2.4, 2.4) zu den außermathematischen Analogien weicht das Verständnis von außermathematischem Modellieren in der vorliegenden Arbeit von dem in der Arbeit von Brinkmann ein wenig ab. Deshalb wird in 3.2 eine Analyse des Modellbegriffs für den Mathematikunterricht unter Zuhilfenahme der allgemeinen Modelltheorie und des innermathematischen Modellbegriffs vorgenommen. Ziel ist es, einen stärkeren Bezug zu den Vorschläge von Wittenberg, Wittmann, Vollrath, Freudenthal (vgl. 2.2) herauszuarbeiten. Dieser soll die Aufmerksamkeit auf die ungenutzten Potenziale der außermathematischen Einkleidungen, Analogien und Metaphern als effektive heuristische Mittel im Sinne von Modellen für innermathematische Zusammenhänge lenken.

Vor allem Brinkmanns Orientierung an der Praxis des Mathematikunterrichts und die Anschlussfähigkeit des Ansatzes einerseits an systemtheoretische Überlegungen zur Mathematik und ihrer Didaktik, andererseits an inhaltlich orientierte Didaktik half Brinkmann, einen Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ innerhalb der GDM zu gründen. Neben den Tagungen, auf denen außer wissenschaftlichen Vorträgen Lehrerfortbildungen angeboten werden, gehört die Schriftenreihe „Mathe vernetzt“ mit Anregungen und Materialien für Lehrer zu den Aufgaben des Arbeitskreises. Eine Verknüpfung von Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts ist das Ziel des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“. Die Intentionen des Arbeitskreises stehen somit in der Tradition von Klein, der seine Didaktik nicht ohne Lehrer denken wollte. Dies alles spricht für ein kommunikatives Potenzial des von Brinkmann gewählten Ansatzes (vgl. Brinkmann, Maaß, Siller 2010). Auch die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Verknüpfung von Theorie und Praxis von Vernetzungen im Mathematikunterricht leisten.

Im Gegensatz zu Brinkmann wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit im Sinne von Kießwetter aus der Betrachtung von metaphorischen Wendungen, impliziten Beschreibungen in den didaktischen Texten und mathematischen Beispielen erschlossen werden, was in der jeweiligen Situation unter Vernetzung verstanden und gemeint ist. Zu den impliziten Beschreibungen gehört auch die von Brinkmann aufgestellte Klassifikation, wobei vor allem innermathematische Vernetzungen als innermathematische Verbindungen im Sinne von Vollrath (vgl. 2.2.5) und Hischer (vgl. 2.3.3) thematisiert werden. Die Kategorie innermathematischer anwendungsbezogener Vernetzungen wird demnach mit Hilfe von Ansätzen zum Problemlösen und Modellieren modifiziert. Die außermathematische Welt wird hier vor allem als Mittel, um innermathematische Beziehungen herzustellen, gesehen. Die von Brinkmann beschriebene kognitive Ebene des Schülers und die Ebene der Unterrichtsinhalte werden zur epistemischen Ebene der Vernetzung zusammengefasst und um die sozialen Ebene (oder Ebene der Lerngruppe) ergänzt (vgl. 3).

2.3.3 Hischer: „Vernetzender Unterricht“

Zu den neueren Versuchen, den Begriff Vernetzung zu klären und im didaktisch-pädagogischen Kontext zu reflektieren, gehört der Ansatz von Hischer (2010a). Vor allem die Betrachtung der sozialen Ebene der Vernetzung in einer Lerngruppe bei Hischer ist im Hinblick auf die Zielstellung der vorliegenden Arbeit von Bedeutung. Dadurch werden die von Erziehungswissenschaftlern wie beispielsweise Klafki und Tenorth (vgl. 2.1.1) und von Mathematikdidaktikern wie beispielsweise Heymann, Führer, Vohns (vgl. 2.1.2) und Kießwetter (vgl. 2.3.1) formulierten Gedanken zu den sozialen Aspekten des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts aufgegriffen. Im Folgenden wird deshalb eine kurze Zusammenfassung von Hischers Ansatz gegeben.

Präzisierung und Reflexion des Vernetzungsbegriffes

Hischer setzt sich kritisch mit dem Vernetzungsbegriff auseinander und fragt sich, ob der Begriff in der Tat neue Qualitäten aufweist oder ob er nur ein anderes Wort für die von Vollrath vorgeschlagenen Verbindungen und Beziehungshaltigkeit ist. Dies formuliert er als Frage danach, ob mit „Vernetzen“ tatsächlich ein Bildungsanspruch einhergeht, der mit dem „Verbinden“ noch nicht erfasst wird und der über die „teilweise nur statisch“ interpretierbare „Beziehungshaltigkeit“ hinausgeht (vgl. Hischer 2011, 393). Bemerkenswert an der Stelle ist, dass Hischer Beziehungshaltigkeit teilweise als etwas Statisches sieht.

Mögliche Antworten auf die Frage nach dem mit dem Begriff Vernetzung einhergehenden Bildungsanspruch deutet Hischer in seinem Buch „Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? Vernetzung als Medium zur Weltaneignung“ (2010a) an. Die in dem Buch unterbreiteten Präzisierungsversuche sind insofern als Vorschläge zu verstehen, als er sie zunächst der didaktischen Gemeinschaft zur Diskussion stellen möchte. Im Folgenden soll diese Diskussion aufgegriffen werden und neben einer kurzen Zusammenfassung der Vorschläge von Hischer eine Reflexion seiner Begriffsklärungen im Hinblick auf die in der vorliegenden Arbeit bereits vorgestellten Ansätze zur Vernetzung und die Fragestellung der Arbeit erfolgen.

Netz, Netzgraph, Netzwerk, soziales Netzwerk

Nachdem Hischer die Notwendigkeit seiner begrifflichen Analyse durch vielfach vorherrschende Beliebigkeit im Gebrauch des Begriffes Vernetzung motiviert hat, setzt er sich zunächst mit dem metaphorischen Gehalt des Wortes Netz auseinander.[22] Eines von vielen Einstiegsbeispielen ist die Metapher des Fischernetzes:

> *„Ein materielles Netz wie beispielsweise ein Fischernetz kann als maschenartiges Gebilde aufgefasst werden, das aus Kanten und Knoten zu bestehen scheint. Betrachten wir z. B. in der Mathematik Definitionen, Sätze, Beispiele usw. als Knoten und Zusammenhänge bzw. Beziehungen zwischen diesen als Kanten, so liegt es nahe, diese in ihrer Gesamtheit als Bestandteile eines abstrakten Netzes aufzufassen.“* (Hischer 2011, 391).

[22] Eine Reflexion über Netze als pädagogischer Metapher findet sich auch in früheren Beiträgen von Hischer (2009).

Die Hauptmerkmale eines Netzes, die durch die Metapher des Fischernetzes markant werden, sind seine Maschen, in denen man sich „verfangen“ bzw. zum „Inhalt des Netzes“ werden kann. Da Brinkmann (vgl. 2.1.2) unter mathematischen Objekten Begriffe, Lehrsätze, Beweise, Algorithmen, Formeln, Terme versteht, sind die Knotenmengen zunächst bei Hischer und bei Brinkmann ähnlich definiert. Der wesentliche Unterschied besteht jedoch darin, dass Brinkmann bereits eine Beziehung bzw. Relation zwischen zwei Knoten als Vernetzung bezeichnet, während Hischer die Existenz von Maschen, die aus mehreren Kanten bestehen, zum Definitionsmerkmal wählt (vgl. 2.3.2). Beide Definitionen sind im Zusammenhang mit Mathematikunterricht erst dann relevant, wenn sie die Schüler einbeziehen. Dies erfolgt bei Brinkmann dadurch, dass sie zwischen der stofflichen und der kognitiven Ebene des Schülers unterscheidet.

Im Jahr 2009 wurde im Rahmen des Projektes *Kapitelübergreifende Rückschau* eine Erweiterung dieser beiden Ebenen von Vernetzungen durch die soziale Ebene der Lerngruppe vorgeschlagen (vgl. Nordheimer 2009). Diese Erweiterung lässt sich durch begriffliche Analysen von Hischer (2009, 2010a, 2011) präziser beschreiben.

Nach Hischer bilden die Schüler als Benutzer des Netzes gewissermaßen dessen Inhalt (vgl. Hischer 2011, 391). Das klingt für einen Mathematiklehrer und Mathematikdidaktiker zunächst aus mindestens zwei Gründen ungewöhnlich: Erstens ist sowohl unter Lehrern wie auch unter Didaktikern mit den Inhalten meistens mathematischer „Stoff“ gemeint. Zweitens ist es etwas irritierend, dass Benutzer im Netz eingefangen und zum Inhalt werden können. Bei einer längeren Betrachtung lässt sich dieses Bild auf dem Hintergrund bildungstheoretischer Ausführungen in 2.1 folgendermaßen interpretieren: Der Mensch und seine Bildung im Sinne von Selbstbildung ist demnach letzten Endes das Ziel auch des schulischen Mathematikunterrichts. Das Individuum benutzt ein Netz, um sich inhaltlich und persönlich weiter zu entwickeln. Hier wird der Blick auf den Menschen gelenkt, er wird zum „Inhalt“ der Bildung, während mathematische Inhalte zum Medium der Weltaneignung werden (vgl. 2.1).

Die Lehrer beobachten und steuern nach Hischer als Betrachter den Prozess der „Netznutzung“ (vgl. Hischer 2011, 1). In dem Zusammenhang ist es wichtig, die Definition von Netz im pädagogisch-didaktischen Konzept zu nennen, weil sie der pädagogischen Paradoxie zwischen Steuerung durch den Lehrer und Selbständigkeit der Schüler einen Ausdruck zu verleihen vermag (vgl. 1.4): Ein Netz kann einerseits Schutz und Sicherheit geben, kann aber auf der anderen Seite einengend sein. In Anlehnung an Hischer wird hier das Bild der Maschen im Netz verwendet, um die Grenzen des pädagogischen Handelns zu beschreiben. Denn die Maschen können metaphorisch ausgedrückt nicht nur „einfangen“, sondern auch das „Entschlüpfen“ aus dem Vorhaben des Lehrers ermöglichen.

Im Weiteren geht Hischer axiomatisch vor und definiert das Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext (Hischer 2010a, 69ff.):

> *„Definition: Ein Netz ist eine strukturierte Zusammenfassung von Bestandteilen, Benutzern und Betrachtern, die folgenden drei Aspekten genügt:*
>
> 1. *Zweckaspekte (z. B. Schaffen von Verbindungen, Aufdecken von Zusammenhängen),*
> 2. *Handlungsaspekte (wie „vernetzen“ im Sinne der Konstruktion oder Deutung von Objekten als Knoten eines neuen oder zu erweiternden Netzes) sowie*
> 3. *Zustandsaspekte (im Sinne von „Vernetzt-Sein“ als Bestandteil oder „Im-Netz-Sein“ als Benutzer eines Netzes).“*

Nach Hischer können sowohl Schüler wie auch Lehrer ihre Rollen als Betrachter und Benutzer tauschen, aber auch zu Bestandteilen eines Netzes werden (vgl. Hischer 2010a, 66ff.). Vor allem das Letztere wird im Zusammenhang mit dem Exkurs in die Soziologie der Mathematik und der Konstruktion von Aufgabennetzen noch einmal aufgegriffen (vgl. 3.3).

Auch wenn die eingeführten Begrifflichkeiten Assoziationen mit der Systemtheorie hervorrufen, schlägt Hischer bei seinen Präzisierungen einen anderen Weg ein und führt nach mehreren Definitionsversuchen den Netzgraphen als grafentheoretischen Teil eines Netzes im didaktisch-pädagogischen Kontext ein. Dabei ist das Vorhandensein von Maschen als einem charakteristischen Merkmal entscheidend (Hischer 2010a, 107):

> *„Definition: Es sei (V,E) ein Graph. (V,E) ist genau dann ein Netzgraph, wenn gilt:*
> *(NG1) (V,E) ist endlich.*
> *(NG2) (V,E) ist zusammenhängend.*
> *(NG3) Jede Kante aus (V,E) ist Teil einer Masche.*
> *(NG4) Für alle Knoten P aus (V,E) gilt: Grad(P)* ≥ 3.“

Mit anderen Worten ist ein Netzgraph idealtypisch ein endlicher, zusammenhängender Graph, bei dem jede Kante „Teil einer Masche“ ist. Dabei soll jeder Knoten mindestens den Grad 3 haben. In Netzgraphen existieren demnach zwischen je zwei Knoten stets mindestens zwei verschiedene Wege (vgl. Hischer 2010a, 107).

In dem linken Teil der Abbildung 2.10 wird ein Netzgraph dargestellt. Netzwerke entstehen aus den Netzgraphen durch Herausnehmen einiger Kanten. Auch ein Netzwerk enthält zusammenhängende, maschenhaltige Kanten. Ein derartiges Netzwerk ist in der Abbildung 2.10 rechts dargestellt. Somit ist „Netzwerk“ nach Hischer eine Bezeichnung für die strukturelle Gesamtheit der Bestandteile eines Netzes im pädagogisch-didaktischen Kontext. Demzufolge ist jeder Netzgraph ein besonderes Netzwerk (vgl. Hischer 2010a, 82ff., 2011, 3).

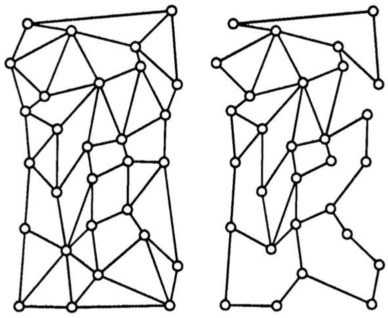


Abbildung 2.10: 2010a, 108

Im Hinblick auf die in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagene Erweiterung der von Brinkmann definierten Ebenen der Vernetzung durch die soziale Ebene sind vor allem von Hischer beschriebene soziale Netzwerke interessant. Ausgehend von obigen Begrifflichkeiten können Benutzer und Betrachter jeweils ein soziales Netzwerk bilden (vgl. Hischer 2011, 393). So können z.B. zwei Schüler genau dann durch eine Kante verbunden sein, wenn sie eine Aufgabe gemeinsam gelöst oder vielleicht sogar formuliert haben. Somit generiert jede Aufgabe ihr eigenes soziales Netzwerk.[23]

Netz-Dilemma

Anknüpfend an Kießwetter, der 1993 darauf hinwies, dass Handeln grundsätzlich in der Zeit stattfindet und somit linear bzw. nicht vernetzt ist, formuliert Hischer ein Netz-Dilemma:

> *„Die ‚Komplexität der Welt', in der wir leben, ist (vermutlich) eine [. . .]‚vernetzte' und kann damit nur durch [. . .] ‚vernetzendes Denken' approximierend erschlossen werden, nicht aber durch ‚monokausales Denken'. Zugleich findet unser Handeln grundsätzlich in der Zeit und damit nur ‚linear' und also nicht vernetzt statt. Und das betrifft dann entsprechend auch den (zeitlichen) Aufbau von Kognition im Individuum selbst.*" (Hischer 2010, 186)

Diese Situation bezeichnet Hischer nicht ohne Grund als „fatal" (vgl. Hischer 2011, 393). Die fatale Situation in der Schule wird dadurch entschärft, dass das Individuum nicht allein und isoliert handeln muss und handelt, sondern in einer Gruppe von Gleichaltrigen. Die Beobachtungen der schulischen Praxis zeigen, dass gerade Zeitdruck zum kooperativen Problemlöseverhalten von Schülern führen kann. Dies lässt sich durch das Lösen von Übungsserien während des Mathematikstudiums oder gemeinsames Lösen von Aufgaben während einer Klassenarbeit ggf. hinter dem Rücken des Lehrers illustrieren. In diesen Situationen finden die Studierenden und Schüler Wege, mit dem „Netz-Dilemma" und der „Linearität der Zeit" umzugehen, indem sie intensiv zusammen arbeiten. Eine verstärkte Berücksichtigung sozialer Aspekte von Vernetzungen in der Lerngruppe kann zwar das „Netz-Dilemma" nicht lösen, bietet jedoch Möglichkeiten, produktiv damit umzugehen.

[23]Hierbei ist wichtig zu beachten, dass an der Stelle lediglich aufgabenbezogene soziale Netzwerke gemeint sind und nicht soziale Netzwerke, wie sie den Schülern beispielsweise aus *SVZ* und *face-book* bekannt sind.

„Vernetzender Unterricht"

Als Alternative zum Begriff „Vernetzen“ schlägt Hischer eine Definition des „vernetzenden Unterrichts“ vor: Dies ist

> *„[...] ein Unterricht, der durch schüleraktives Zusammenhangsdenken gekennzeichnet ist: also die Inszenierung eines Unterrichts, in dem die Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge zwischen Gebieten, Themen, Ideen, Begriffen etc. als Bestandteile eines Netzes nicht nur erkennen und entdecken, sondern auch eigenständig herstellen.“* (Hischer 2011, 394)

Durch die Betonung der Selbständigkeit der Schüler knüpft die Definition vor allem in ihrer ersten Fassung an die auf Humboldt zurückgehende Tradition an, Bildung als Selbstbildung zu verstehen (vgl. 2.1.1). Darüber hinaus wird in der Definition klar formuliert, was vernetzt werden soll und wer dafür verantwortlich ist. Gebiete, Themen, Ideen, Begriffe etc. als Bestandteile eines Netzes lassen sich in allen drei Grunderfahrungen von Winter wiederfinden. Sie können sowohl als Bestandteile des „vernetzten Universums“ wie auch als mathematische Modelle, aber auch als Bereiche des Übungsfeldes für heuristisches und analytisches Denken nach Winter interpretiert werden. Andererseits werden in dieser Definition wie bei Heymann soziale Aspekte des Vernetzens mit berücksichtigt (vgl. 2.1.2). Somit lässt sich die Definition von „vernetzendem Unterricht“ vor dem Hintergrund der Modelle allgemeinbildenden Mathematikunterrichts von Winter und Heymann theoretisch einordnen. Hischer selbst stellt seine Begrifflichkeiten in den Kontext des Allgemeinbildungskonzepts von Klafki.

Darüber hinaus fordert Hischer in den an die Definition anschließenden Bemerkungen die Lehrer auf, nicht nur auf die geplanten, sondern auch auf unbeabsichtigte Folgen des „vernetzenden Unterrichts“ zu achten und sich nicht bezüglich der geplanten Folgen täuschen zu lassen. Somit werden laut Hischer mit dem Begriff verbundene pädagogische und didaktische „Allmachtsphantasien“ beispielsweise in Bezug auf die Erreichbarkeit bestimmter Unterrichtsziele bei den Schülern relativiert.

2.4 Theoretischer Rahmen zur Entwicklung von Aufgabennetzen

Das Ziel von 2.4 ist, die Ergebnisse aus 2.2 und 2.3 zusammenzufassen. Die Ergebnisse aus 2.4 werden anschließend an der Entwicklung eines Aufgabennetzes „Tangram“ für die 6. Klasse konkretisiert und illustriert (vgl. 2.5). Diese Konkretisierung soll wiederum den Bedarf an Weiterentwicklung des theoretischen Rahmens aufzeigen, der zum Gegenstand des 3. Kapitels wird.

In 2.2 und 2.3 wurde gezeigt, dass die Ideen von Beziehungshaltigkeit und Vernetzungsreichtum in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik historisch aufeinander aufbauen. Abgesehen von gewissen Akzentverschiebungen, die durch Veränderungen in der mathematikdidaktischen Diskussion bedingt sind, weisen beide Konzepte Merkmale auf, die im Laufe der Zeit unverändert geblieben sind.[24] Dazu zählen

- die Auffassung von Mathematik als einer beziehungshaltigen oder vernetzungsreichen Wissenschaftsdisziplin und eines Unterrichtsfaches;
- die Anerkennung von Beziehungshaltigkeit und Vernetzungsreichtum im Mathematikunterricht als einem wichtigen Unterrichtsziel;
- Beziehungen und Vernetzungen im Mathematikunterricht werden als lernpsychologische Argumente eingesetzt. Demzufolge sollen sie zur Nachhaltigkeit des Lernens und zur Problemlösefähigkeit der Schüler beitragen;
- Beziehunghaltigkeit und Vernetzungsreichtum der Mathematik stehen im Widerspruch zur Linearität des menschlichen Denkens und des Unterrichtsgeschehens.

Ausgehend von dem Wesen der mathematischen Fachsprache und ihrer pädagogischen Bedeutung sieht Führer (2002, 66) „Beziehungshaltigkeit" und „Vernetzungen" als nahe didaktische Konzeptionen:

> *„Mathematisch bedeutsame Begriffe sind aber gerade durch das geprägt, was Freudenthal ‚Beziehungshaltigkeit' nannte, andere vielleicht ‚operative Vernetzungen' o.ä. Zumindest aus pädagogischer Sicht gilt: Die wesentlichen Begriffe der Mathematik sind Beziehungsbegriffe, relativistische ‚Undinge' oder ‚relationale Funktionen'."*

Deshalb werden im Weiteren die Begriffe „Beziehungshaltigkeit" und „Vernetzungsreichtum" als bedeutungsähnlich verwendet, es sei denn, dass es an einer bestimmten Stelle darum geht, die Unterschiede im Detail zu betonen. So werden beispielsweise bei Beziehungshaltigkeit und Vernetzungen eher epistemische, kognitive und fachinhaltliche Aspekte des Unterrichts berücksichtigt (vgl. 2.3.1 und 2.3.2), während „Netze" und „vernetzender Unterricht" nach Hischer (vgl. 2.3.3) soziale Aspekte des Denkens und des Mathematikunterrichts explizit miteinbeziehen. In diesem Sinne lassen sich die Begriffe „vernetzend" bzw. „vernetzt" mit in der Theorie und in der Praxis schon bekannten Begriffen kombinieren. Durch die Wortzusammenstellungen „vernetzender Unterricht" bzw. „vernetzende Aufgaben" werden aktuelle Diskussionen zur Kenntnis genommen,

[24] An dieser Stelle sei angemerkt: „Stabilität und Veränderung sind keine absoluten Kategorien, sondern hängen immer vom zeitlichen und räumlichen Horizont ab." (Ossimitz und Lapp 2006, 85). In diesem Sinne ist der Geltungsbereich der dargestellten Sichtweise auf Beziehungshaltigkeit und Vernetzungen im Mathematikunterricht nicht nur zeitlich und räumlich begrenzt, sondern auch von dem praxisbezogenen Blickwinkel der vorliegenden Arbeit abhängig.

ohne traditionell etablierte Begriffe der Fachdidaktik und der schulischen Praxis zu verdrängen.

Es besteht also in der Mathematikdidaktik ein Konsens darüber, dass Beziehungshaltigkeit Mathematik kennzeichnet, von daher im Unterricht angestrebt werden soll und darüber hinaus Lern- und Problemlöseprozesse der Schüler im Mathematikunterricht unterstützen kann. In einem erweiterten Sinne soll innermathematische Beziehungshaltigkeit einen Beitrag zur Allgemeinbildung leisten (vgl. 2.1).

Die Ursache für Beziehungsarmut im Mathematikunterricht könnte in dem Widerspruch zwischen Vernetzungsreichtum der Mathematik und der Linearität des menschlichen Denkens liegen. Denn der Unterricht findet in einem abgesteckten zeitlichen Rahmen statt. Demzufolge begrenzt auch hier die Linearität der Zeit die Möglichkeiten, Vernetzungen im Unterricht zu thematisieren. Damit verbunden kann Beziehungsarmut des Mathematikunterrichts beispielsweise durch die strukturellen Gegebenheiten der Schule begründet werden. Zu den strukturellen Gegebenheiten des Unterrichts zählt sein 45-minütiger Stundentakt, auf den Kießwetter hinweist (vgl. 2.3.1). Wie diese Schwierigkeiten durch Entwicklung von entsprechenden Unterrichtsvorschlägen kompensiert werden können, wird in der vorliegenden Arbeit durch die Erprobungen skizziert.

Um eine Fusion der Schulmathematik nicht nur auf der Ebene der Lehrpläne zu erreichen, versuchte seinerzeit Klein (vgl. 2.2.1) auf die Lehrerausbildung einzuwirken. Freudenthal (1973) hat mit Beziehungshaltigkeit zusammenhängende Probleme in der Ausbildung der Lehrer in seinem Buch „Mathematik als pädagogische Aufgabe“ zusammengefasst. Dort hat er auch Anregungen gegeben, wie diesen Schwierigkeiten begegnet werden könnte. Darunter kommen die Integration der didaktischen Ideen in die Lehrerausbildung und regelmäßige Weiterbildungen der Lehrer vor. Das ist auch das Anliegen der vorliegenden Arbeit. Da die institutionalisierten gesellschaftlichen Strukturen der Schule kurzfristig schwer veränderbar sind, stellt sich im Rahmen dieser Arbeit die Frage nach Unterrichtskonzepten, -materialien und -methoden, die trotz der strukturellen Schwierigkeiten Veränderungen im Hinblick auf einen beziehungshaltigen Mathematikunterricht in der Schule bewirken könnten. Eine stärkere Berücksichtigung von sozialen Aspekten des Unterrichts durch Einteilung der Klasse in aufgabenbezogene Expertennetzwerke soll hierbei im Sinne eines „vernetzenden Unterrichts“ nach Hischer (2009, 2010) von besonderer Bedeutung sein.

2.5 „Tangram“: Entwicklung des *Aufgabennetzes* für die 6. Klasse

Die folgenden Ausführungen verfolgen vor allem zwei Ziele: Einerseits sollen bereits erarbeitete theoretische Ergebnisse auf die Entwicklung eines konkreten Aufgabennetzes angewendet werden. Andererseits soll die Entwicklung und Erprobung des Aufgabennetzes „Tangram“ den Bedarf an Weiterentwicklungen von theoretischen Konzeptionen im Rahmen der vorliegenden Arbeit aufzeigen. Diese werden anschließend im Kapitel 3 dargestellt.

Im Sinne einer „integrativen Wiederholung“ nach Wittmann und Hinweisen von Vollrath zum beziehungshaltigen Mathematiklernen können Unterrichtsinhalte am Ende des Schuljahres anhand von Aufgaben oder Problemen zusammengefasst werden (vgl. 2.2.5). Dafür werden sogenannte *Aufgabennetze* entwickelt. Als Anregungen dafür werden „Themenkreise“ von Wittenberg herangezogen (vgl. 2.2.4). Ergänzt werden diese im Folgenden durch eine stärkere Berücksichtigung der sozialen Ebene der Vernetzung durch Gruppenarbeit bzw. Expertennetzwerke der Schüler. Dies geschieht durch Bearbeitung der Themenkreise in Gruppenarbeit. Ein wesentliches Ziel dabei ist, einen Umgang mit dem Netz-Dilemma zu finden (vgl. 2.3.1 und 2.3.3)

Gruppenarbeit kann neben fachinhaltlichen Ansprüchen an Aufgabenformulierungen hohe Anforderungen an die soziale Struktur der ganzen Lerngruppe und an die sozialen Kompetenzen des einzelnen Schülers stellen. Deshalb stellt sich die Frage nach der verbindenden Funktion der Unterrichtsmaterialien. Um Initialaufgaben und später ihre Variationen zu bündeln und den Schülern einen gemeinsamen Anhaltspunkt zur Orientierung zu geben, bietet es sich an, mit einer Einstiegsaufgabe für alle anzufangen und diese durch enaktive oder ikonische Unterrichtsmaterialien, die als „Anker“ fungieren, zu unterstützen. So lässt sich beispielsweise eine Zeichnung, ein Applet oder ein Spielelement als ein gemeinsamer Ausgangspunkt markieren, zu dem Schüler in jeder Phase einer Wiederholungseinheit bei Bedarf zurückkehren können. Auf diese Weise wird den Schülern eine Orientierung in einer großen Vielfalt der Inhalte, die innerhalb einer kurzen Zeit angesprochen werden, angeboten (vgl. Murphy und Wang 2004, S. 107ff.). Dies steht im Einklang mit der gestalttheoretisch begründeten Zentrierung von Unterrichtsinhalten um ein geometrisches Phänomen nach Wittenberg (vgl. 2.4).

Wie bereits in 1.2 dargestellt wurde, sollen den Schülern im Gegensatz zur *Aufgabenvariation* nach Schupp hier nicht nur eine, sondern mehrere *Initialaufgaben* angeboten werden. Sechs oder sieben *Initialaufgaben* werden zum Lösen auf kleine Gruppen aufgeteilt. Sie werden ebenfalls wie in der Einleitung beschrieben in den Kontext des Tangram-Spiels gestellt und an die inhaltlichen Anforderungen des Berliner Rahmenlehrplans für die Doppeljahrgangsstufe 5/6 angepasst (vgl. 1.1, 1.2).

2.5.1 Begründung der Medienwahl

Abbildung 2.11: Holztangram

Die Abbildung 2.11 zeigt ein Tangram aus Holz, das 5 mm hoch ist. Zusammengesetzt zu einem Quadrat, hat das gesamte Spiel eine Seitenlänge von ca. 11 cm.

Warum eignet sich gerade ein derartiges Tangram besonders gut, um verschiedene mathematische Inhalte rückblickend zu betrachten? In der fachdidaktischen Literatur finden sich auf der einen Seite zahlreiche Vorschläge zum Einsatz des Tangrams im Geometrieunterricht (vgl. stellv. Wittmann 2003, 8ff.). Des Weiteren wird das Tangram sehr häufig als ein Medium zur Einführung in die Bruchrechnung empfohlen (vgl. Heider 2006, 1ff.). Die Bruchrechnung ist wiederum ein zentrales inhaltliches Gebiet der Doppeljahrgangsstufe 5/6 unabhängig von der Schulart und dem Bundesland. Das Tangram-Spiel lässt außerdem den Einsatz bei Fragestellungen aus den Elementen der Stochastik zu. Somit bietet es verschiedene Möglichkeiten, Geometrie, Arithmetik und Elemente der Stochastik auf dem Niveau der 6. Klasse in einem Kontext zu verbinden.

Darüber hinaus kann das abgebildete Tangram aus Holz sowohl als ebene Figur als auch als geometrischer Körper interpretiert werden. Auf diese Weise lässt sich am Ende des Schuljahres zusammenfassend auf die Unterschiede zwischen Flächen und Körpern und den entsprechenden Einheiten eingehen (vgl. Initialaufgabe A5 und A6).

Unter Berücksichtigung sozialer Aspekte ist hinzuzufügen, dass sich ein Tangram besonders gut für den Einsatz bei kooperativen Lernformen eignet (vgl. Wittmann 2003, 8ff.). Andererseits ist Tangram ein Medium, das zum Spielen und Experimentieren einlädt, was gleichzeitig als Chance und Gefahr angesehen werden kann. Denn statt mathematische Aufgaben zum Tangram zu lösen, können Schüler sich herausgefordert fühlen, mit dem Tangram eigene neue Figuren zu legen bzw. Türme zu bauen. Auf diesem Wege lassen sich zwar Phantasie und Kreativität der Schüler fördern, dennoch ist nicht auszuschließen, dass sie sich dadurch von dem ursprünglichen Ziel, das Gelernte zu wiederholen und zu verbinden, entfernen (vgl. 1.2).

Außerdem kann ein Tangram-Puzzle auch als Symbol für die Vorgehensweise im Unterricht stehen: Ähnlich wie aus den sieben Tangram-Steinen immer wieder neue Figuren entstehen, können bereits behandelte Inhalte und gelöste Aufgaben zu neuen Fragestellungen kombiniert werden. Auch die Schülergruppen werden im Laufe der Wiederholungsstunden neu zusammengestellt. So kann „vernetzender Unterricht“ im Sinne von Hischer inszeniert werden (vgl. 2.3.3).

Im Folgenden werden die für die Erprobung in einer 6. Klasse eines Gymnasiums in Berlin entwickelten Initialaufgaben zum Lösen in Gruppen vorgestellt und kommentiert.

2.5.2 Initialaufgaben des Aufgabennetzes

Ausgehend von dem in 1.4.1 vorgestellten Kontext des Tangrams und der Einstiegsaufgabe wurden gemeinsam mit einer Mathematiklehrerin für ihre 6. Klasse folgende Initialaufgaben entwickelt:[25]

A1: *Welche speziellen Winkel, besonderen Linien, Dreiecke und Vierecke entdeckt ihr auf dem Bild zum Tangram? Beschreibt und begründet die Besonderheiten eurer Entdeckungen.*

A2: *Einige Teilfiguren können durch eine oder mehrere Bewegungen auf andere abgebildet werden. Gebt entsprechende Bewegungen an und beschreibt diese.*

A3: *Welche Regeln der Bruchrechnung (Kürzen, Erweitern, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) könnt ihr mit Hilfe des Tangrams erklären? Ordnet dafür jedem Tangram-Stein einen Anteil an dem Ganzen als Bruch zu.*

A4: *Welche weiteren Vielecke könnt ihr mit allen sieben Teilen legen? Berechnet jeweils Umfang und Flächeninhalt.*

A5: *Streng genommen besteht das Tangram aus geometrischen Körpern. Berechnet die Oberflächeninhalte und Volumina des gesamten Spiels und der einzelnen Steine.*

A6: *Auf dem Markt ist ein neues Magnet-Dartspiel, das genau wie ein quadratisches Tangram-Puzzle aussieht. Ist es wahrscheinlicher, ein Parallelogramm oder ein Dreieck zu treffen? Begründet!*

A7: *Welche verschiedenen flächengleichen Parallelogramme könnt ihr mit allen sieben Teilen legen? Wie hängen Höhen und Seiten dieser Parallelogramme zusammen?*

Alle Initialaufgaben haben einen Bezug zur Leitidee *Form und Veränderung* (vgl. 2.2.4). A3 bezieht sich darüber hinaus auf die Leitidee *Zahlen und Operationen* und hat das Ziel, Brüche mit Hilfe von geometrischen Figuren zu veranschaulichen und somit im Rahmenlehrplan verbindlich aufgeführte innermathematische Verknüpfungen aufzuzeigen. A6 zielt auf eine andere innermathematische Verknüpfung aus dem Rahmenlehrplan und zwar die Darstellung von Wahrscheinlichkeiten als Brüche (vgl. Rahmenlehrplan. Grundschule. Berlin 2004, 39ff.). Diese soll über die Flächeninhalte der einzelnen Steine und ihre Anteile an dem Gesamtflächeninhalt erfolgen.

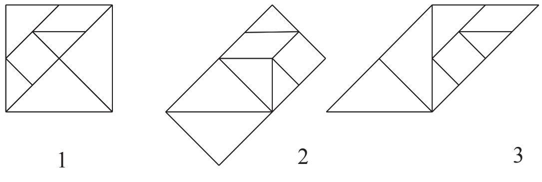


Abbildung 2.12: Tangram-Parallelogramme

In A7 soll eine weitere innermathematische Verknüpfung angesprochen werden, die im Berliner Rahmenlehrplan nicht explizit erwähnt wird. Es gibt insgesamt drei Möglichkeiten, mit

[25] Alle Aufgaben beziehen sich auf die Lösung der quadratischen Lösungsfigur zu der Einstiegsaufgabe, die in der Abbildung 1.1 dargestellt wurde (S. 4).

allen sieben Tangram-Steinen verschiedene Parallelogramme zu legen (siehe Abb. 2.12). Die Erkenntnis, dass es sich auch beim Quadrat (1) und einem weiteren Rechteck (2) um Parallelogramme handelt, kann deduktive Verbindungen im Sinne des lokalen Ordnens im Haus der Vierecke fördern. Darüber hinaus gibt es beispielsweise für ein Rechteck, das kein Quadrat ist (2), verschiedene Möglichkeiten, die Lösungsfigur zu legen. Eine Möglichkeit ist in Abbildung 2.12 dargestellt. Die nächste Möglichkeit entsteht beispielsweise durch Spiegelung der Teilquadrate der Lösungsfigur. Die Vielfalt von Kombinationen erlaubt dem Lehrer als Betrachter die Inszenierung von Unterricht, in dem eine Problemstellung auf vielen verschiedenen Wegen bearbeitet werden kann. Unterschiedliche Lösungswege verschiedener Schüler können miteinander verglichen werden. Es können Fragen nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden hinsichtlich der Flächeninhalte und Umfänge von verschiedenen Vielecken aufkommen.

Da alle Vielecke in kongruente Figuren zerlegbar sind, haben alle abgebildeten Parallelogramme gleiche Flächeninhalte. Eine Übersetzung dieser Tatsache in die Sprache der Leitidee *Zahlen und Operationen* liefert folgende Erkenntnis: Die Produkte aus der Höhen- und Grundseitenlänge dieser Parallelogramme sind gleich. In dem Quadrat (1) und einem weiteren Parallelogramm, das kein Rechteck (3) ist, stimmen die Höhen- und Grundseitenlänge überein (siehe Abb. 2.12). Für das weitere Parallelogramm (3) bestehen zwei Möglichkeiten, die Seiten als Höhen- und dementsprechend Grundseitenlängen zu interpretieren. Demzufolge ergeben sich insgesamt drei verschiedene Wertepaare für Höhen- und Grundseitenlängen. Diese Wertepaare können in einer Tabelle oder einem Koordinatensystem dargestellt werden. Aus der Produktgleichheit folgt die Antiproportionalität der Zuordnung *Höhenlänge → Grundseitenlänge*. So kann durch Kombination von Inhalten, die der Leitidee *Form und Veränderung* und *Zahlen und Operationen* angehören, Antiproportionalität geometrisch veranschaulicht werden. Wie bei Lietzmann wechseln sich hierbei das „geometrische“ und „arithmetische“ Gesicht der Mathematik ab (vgl. 2.2.3). Geometrische Zusammenhänge werden nicht nur „arithmetisiert“, sondern es werden propädeutisch Inhalte des Bereichs *Algebra und Funktionen* angedeutet.

Jede Initialaufgabe bezieht sich entweder auf ein mathematisches Gebiet oder verbindet zwei oder, in wenigen Fällen, drei Bereiche miteinander.[26] In ihrer Gesamtheit sind sie darauf ausgerichtet, einen „vernetzenden Unterricht“ im Sinne von Hischer zu inszenieren (vgl. 2.3.3). Die Vielfalt der Verbindungen zwischen den Aufgaben und das dadurch entstehende Netz kann erst bei der Auswertung der Lösungen im gesamten Klassenverband zur Geltung kommen. Denn zwischen den einzelnen Aufgaben gibt es Zusammenhänge, die erst in der Reflexion hergestellt werden können. So können

[26] Hier wird von Verbindung gesprochen, um besser an die Vorschläge von Vollrath anknüpfen zu können.

beispielsweise bereits gelöste Aufgaben auf einem anderen Wege gelöst werden bzw. neue Aufgaben entstehen (vgl. stellvertretend Bruder 2002, 4ff.).

Erkenntnisse aus A1 über besondere Dreiecke, Vierecke und Winkel helfen, die Anteile der einzelnen Figuren am gesamten Flächeninhalt des Spiels in A3 zu bestimmen und diese mit Hilfe von geometrischen Sätzen zu beweisen. In A2 entdeckte geometrische Bewegungen können ebenfalls das Bearbeiten von A3, aber auch A4, A5 und A7 erleichtern: Durch das Bewegen von Steinen können neue Lösungen produziert werden. Ergebnisse aus A3 können die Bearbeitung der Aufgaben A4, A5, A6 und A7 erleichtern: Ist der Flächeninhalt des gesamten Spiels bekannt, so können die Flächeninhalte der Teilfiguren durch Multiplikation mit dem Bruch, der für den Anteil der Teilfigur steht, bestimmt werden. Die Volumina der einzelnen Teilkörper können ebenfalls durch den Anteil des Teilkörpers an dem Gesamtvolumen des Tangrams bestimmt werden. Die Treffwahrscheinlichkeiten für die einzelnen Felder des Tangram-Darts aus A6 können über ihre Anteile an dem Flächeninhalt des gesamten Spiels bestimmt werden. Anders sieht es mit der Bestimmung der Umfänge der einzelnen Steine aus, wenn sie als ebene geometrische Figuren interpretiert werden. Hier können flächeninhaltsgleiche Figuren verschiedene Umfänge haben. Auf diese Weise entsteht hier eine „Masche“, die zur Verwirrung der Schüler führen kann. Dies kann aber auch die Schüler zum Nachdenken anregen. Auf diese Weise illustriert A3 das Potenzial der repräsentativen Vernetzungen nach Kießwetter oder Modellvernetzungen nach Brinkmann im Unterricht (vgl. 2.3.1, 2.3.2). Gleichzeitig können durch geometrische Inhalte deduktive Aspekte der Geometrie (Klein, Lietzmann, Wittenberg, Winter) zum Tragen kommen (vgl. 2.2).

2.5.3 Schulische Erprobung

Die Erprobung fand am Ende des Schuljahres 2008/09 in einer 6. Klasse eines grundständigen Gymnasiums in Berlin statt und erstreckte sich über zwei Doppelstunden. In einer Vorbesprechung mit der Mathematiklehrerin wurden zunächst die behandelten Unterrichtsinhalte erfasst. Danach wurde der erste Satz der Initialaufgaben entwickelt und der Lehrerin vorgestellt. Die Lehrerin passte die Formulierungen der Aufgabenstellungen an ihre Klasse an, ohne inhaltliche Veränderungen vorzunehmen. Außerdem entschloss sie sich, auf A6 zu verzichten, weil sie aus ihrer Sicht inhaltlich nicht optimal zur Wiederholung der im Unterricht behandelten Inhalte passte.[27]

Die beiden Doppelstunden wurden von zwei Studierenden beobachtet und reflektiert. Für die Darstellung der Ergebnisse der Erprobung werden Originalausschnitte aus den Hospitationsprotokollen dieser Studierenden verwendet.

[27] Hierbei ging es um eine Aufgabe, die sich auf Elemente der Stochastik bezog.

In der ersten Doppelstunde wurden in Gruppen die Initialaufgaben gelöst und vorgestellt. Die Beschäftigung mit geometrischen Inhalten sowie das Herstellen von Zusammenhängen zwischen ihnen bereitete den Schülern keine größeren Schwierigkeiten. Hier soll zunächst exemplarisch auf die Ergebnisse der Schüler zu den Aufgaben 3 und 4 eingegangen werden. Direkt im Anschluss an die Darstellung von Schülerlösungen und darin sichtbar gewordener Probleme werden Ideen zur Überarbeitung und Weiterführung der Aufgabenstellungen 3 und 4 vorgestellt.

Kommentierte Schülerlösung und Ideen zur Weiterentwicklung von A3

A3: *Welche Regeln der Bruchrechnung (Kürzen, Erweitern, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) könnt ihr mit Hilfe von Tangram erklären? Ordnet dafür jedem Tangram-Stein einen Anteil an dem Ganzen als Bruch zu.*

Eine ausführlichere Darstellung erfordern die Ergebnisse zu A3, weil die Aufgabe geometrische Veranschaulichungen von Brüchen thematisiert. Diese sind als innermathematische Verknüpfungen nach dem Rahmenlehrplan verbindlich vorgeschrieben. Eine Umsetzung dieser Vorgaben in der Schulpraxis bedarf jedoch einer Konkretisierung an Aufgabenbeispielen.

In der Abbildung 2.13 ist die Präsentationsfolie der Kleingruppe, die sich mit A3 beschäftigt hatte, dargestellt. Wie die Schülerinnen in einer kleinen Gruppe gemeinsam an der Aufgabe gearbeitet haben, kann dem folgenden Auszug aus dem Hospitationsprotokoll entnommen werden.

Auszug aus dem Hospitationsprotokoll

Gruppenarbeitsphase: In der Gruppe wurden direkt zu Beginn der Gruppenarbeitsphase (10:08) Aufgaben verteilt. So begann Schülerin a, die gleich eine Führungsposition einnahm, damit, die Aufgabe vorzulesen, während Schülerin d beauftragt wurde, die Folie für die Präsentation der Arbeit zu gestalten. Der erste Vorschlag bzw. Ansatz zu einer Lösung der Aufgabe kam nun auch von a, nämlich, dass man die einzelnen Figuren als Anteile am Flächeninhalt des mittels des Tangrams gelegten Quadrates betrachten könne. So schlug sie vor, dass das große Dreieck $\frac{1}{4}$ *sei. Dieser Vorschlag verlief jedoch erst einmal im Sand, da sich die einzelnen Schülerinnen nun zunächst einmal mit anderen Dingen als der konkreten Aufgabenstellung beschäftigten. Nachdem c und a (Schülerin a: „Guckt mal, ich hab 'ne Kirche!") jeweils für sich mit den Spielsteinen andere Figuren zu legen versuchten, e die einzelnen Figurenbestandteile ausmalte (allerdings nicht gleichwertige Figuren bezüglich des Flächeninhalts mit gleicher Farbe, sondern wahllos in unterschiedlichen Farben) und eine Diskussion über die Überschrift für die Folie, in der sich auf „Brüche berechnen" geeinigt wurde und an der jede einzelne beteiligt war und Vorschläge abgab, abgehalten wurde, besann man sich um 10:22 wieder auf die Aufgabenstellung.*

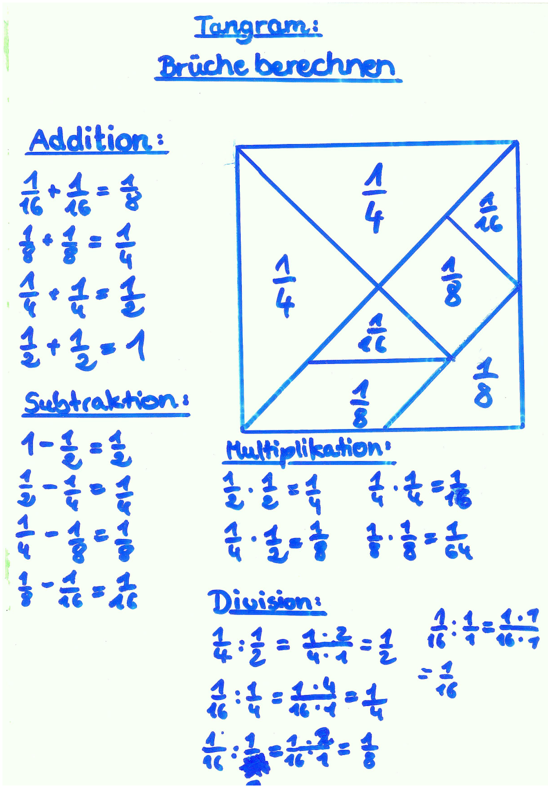


Abbildung 2.13: Lösung (A3)

Hierbei zeigten sich aber einige Unsicherheiten beim Rechnen mit Brüchen. So schlug e vor, dass $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$ *wären, also bei der Addition von Brüchen jeweils Zähler und Nenner miteinander zu addieren sind, während a* $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$ *anbrachte. Daraufhin gab e ihr Recht mit der Begründung, dass* $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ *ja* $\frac{2}{16}$ *wären und man dies dann zu* $\frac{1}{8}$ *kürzen könne. Da man sich unsicher war und sich nicht einigen konnte, fragten die Schülerinnen mich, was denn nun richtig sei. Da ich aber nicht in die Unterrichtssituation eingreifen wollte, half ich ihnen an dieser Stelle nicht weiter.*

Die Diskussion beschränkte sich an dieser Stelle fast nur noch auf die Schülerinnen a und c, die mittlerweile aufgestanden und zu a gegangen war. Sie bemerkte, dass alle Brüche aufaddiert zusammen 1 ergeben müssten, was ihnen an dieser Stelle auch nicht weiter half. Indes (10:28) hatte d im Schulbuch nachgeschlagen und sich nochmals informiert, wie die Addition von Brüchen gelingt. So konnte um 10:29 schließlich damit begonnen werden, die Folie zu beschriften. Schülerin c merkte nun an, dass man die Subtraktion schon „habe", denn aus $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$ *folge ja auch, dass* $1-\frac{1}{2}$ *gleich* $\frac{1}{2}$ *sei. Im Folgenden verloren die Schülerinnen den Bezug zum Tangram eigentlich völlig. Die Diskussionen über das Verrechnen von Brüchen lief nicht mehr auf Grundlage der Bestandteile des Tangram-Spiels ab, sondern eher auf dem Vorwissen der Schülerinnen und dem, was im Schulbuch darüber stand. So notierten sie zwar im Folgenden die Subtraktion und Multiplikation anhand von Beispielen von Brüchen, die als anteilige Flächeninhalte am Gesamtflächeninhalt des Tangrams vorkamen, aber begründeten dies nicht mit dem Spiel selbst. Während a, c und nun auch b über die Division diskutierten und e zuhörte, bekam* *d nur noch Anweisungen, das aufzuschreiben, was die anderen als Ergebnisse erhielten. Dies wurde besonders deutlich, als sie um 10:37 einbrachte, dass $\frac{1}{4} : \frac{1}{4}$ gleich $\frac{1}{4}$ wären, da man Zähler und Nenner multiplizieren müsse. Dieser Vorschlag und das Bedürfnis nach Aufklärung wurde wegen des drohenden Endes der Arbeitsphase von a allerdings mit „Schreib es einfach, Nadja, schreib es einfach!“ abgetan und die Schreibtätigkeit daraufhin sogar von c übernommen.*

Präsentation: Es folgten ab 10:40 die Präsentationen der einzelnen Gruppen. Ich werde hier nur auf die Präsentation der Gruppe 1 (10:54-10:01) eingehen. Hierbei gingen a und c zum Vorstellen des Erarbeiteten nach vorne, wobei c mündlich vortrug und a das Gesagte anhand der auf dem Projektor aufliegenden Folie zu verdeutlichen versuchte. Dabei versuchten sie bei der Addition noch mit dem Tangram zu arbeiten und merkten erst jetzt, dass $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ gar nicht so leicht mit dem Tangram zu zeigen ist.

Bei der Subtraktion wichen die beiden wieder etwas von dem Spiel ab, woraufhin Frau G. die beiden dazu anhielt, den Bezug zum Tangram zu wahren mit dem Einwand, dass man die Subtraktion noch glaubhaft zeigen könne. Für die Multiplikation/Division folgten dann keine Erklärungen mehr, sondern es wurden von a nur noch die den Brüchen entsprechenden Tangram-Teile gezeigt.

Nach jeder Präsentation konnten von den restlichen Schülern Fragen gestellt werden. Ein Schüler aus Gruppe 3 fragte sich dabei, warum denn die Division und Multiplikation überhaupt in die Bearbeitung eingeflossen seien, da diese ja nicht am Tangram erklärt worden waren. Die Antwort der Schülerin war: „Das stand da so.“ Diese Antwort wurde von Frau G. damit kommentiert, dass der Einwand berechtigt gewesen wäre. Die Multiplikation und Division seien nicht einfach durch das Tangram zu erklären, was den Schülerinnen ja auch nicht gelungen sei. Damit wurde die Präsentation der Gruppe 1 beendet.

Das Protokoll zeigt, wie die Schülerinnen ihre Kenntnisse aus Geometrie und Bruchrechnung verbinden. Abgesehen davon, dass das Tangram die Schülerinnen wie im Vorfeld vermutet zum Spielen verleitet hat, zeigten sich in der Bearbeitung der Aufgabe folgende Ergebnisse:

- Den Schülerinnen gelang es, inhaltsgleichen Figuren Brüche zuzuordnen, auch wenn es sich nicht um kongruente Figuren handelte.
- Die Schülerinnen lösten sich sehr schnell von der anschaulichen Ebene.
- Die Schülerinnen konnten sich nicht mehr an die formalen Regeln erinnern. Sie waren in der Lage, mit Hilfe des Lehrbuchs Regeln für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf die vorkommenden Brüche formal anzuwenden.
- Die Schülerinnen waren in der Lage, spontan (in der Präsentation) Addition und Subtraktion auf Anforderung der Lehrerin mit Hilfe des Tangrams zu veranschaulichen.
- Den Schülerinnen gelang es nicht, Multiplikation und Division von Brüchen am Tangram zu veranschaulichen. Auch die Lehrerin zeigte an dieser Stelle ihre Skepsis.

Die Schwierigkeiten sind u.a. mit den inhaltlichen Anforderungen der Aufgabe, aber auch mit einem hohen Grad an Offenheit in der Formulierung der Aufgabenstellungen zu begründen. Um diesen Schwierigkeiten zu begegnen, empfiehlt es sich, Teile der „offenen“ Aufgabe in „konkretere“ Aufgaben umzuformulieren. Derartige Teilaufgaben könnten mit Hilfe von alltagssprachlichen Formulierungen die Kluft zwischen den geometrischen Anschauungen und formalen Regeln überbrücken. Beispiele für die Überarbeitungen der Aufgabenstellungen sowie ihre Erprobungen werden an einer anderen Stelle thematisiert (vgl. Nordheimer 2010c).

Nichtsdestoweniger zeigen die Ergebnisse, dass der Tangram-Kontext vielfältige Möglichkeiten bietet, um Bruchrechnung geometrisch zu veranschaulichen. Der Kontext erlaubt das Einbauen von anspruchsvollen geometrischen Fragestellungen beim Vergleich von ebenen und räumlichen geometrischen Objekten und verknüpft somit deduktive und anschauliche Aspekte der Geometrie.

Ergänzende Betrachtungen zur ersten Doppelstunde

Auch wenn Schüler erfolgreich innergeometrische Fragestellungen des Aufgabennetzes bearbeiteten, stellte sich die Verknüpfung mit der Leitidee *Zahl* als eine besondere Herausforderung dar. Dies zeigen nicht nur die Ausführungen zu A3. So hatten die Schüler beispielsweise nicht ausreichend Zeit, um sich mit der Antiproportionalität in A7 zu beschäftigen, auch wenn sie alle drei Parallelogramme entdeckt hatten und Quadrat und Rechteck als Parallelogramme einordnen konnten (siehe Abb. 2.12). Darüber hinaus konnte das Herstellen von Zusammenhängen zwischen den Leitideen *Form und Veränderung* und *Daten und Zufall* in der ersten Stunde nicht stattfinden, weil die entsprechende Aufgabe A6 von der Lehrerin aussortiert wurde.

In der Auswertung wurden die Schüler mit den restlichen sechs Initialaufgaben sowie ihren Lösungen konfrontiert. Die präsentierenden Schüler konnten so auf ihre Fehler hingewiesen werden und die zuhörenden Schüler Fragen zu den Lösungen stellen. Das heißt, dass jeder Schüler sich intensiver mit einer Aufgabe und weniger intensiv mit fünf weiteren Aufgaben und dementsprechenden Themenbereichen der Mathematik beschäftigte.

Entwicklung von Aufgaben durch Schüler

In der zweiten Doppelstunde konnten die Schüler sich selbst in Gruppen zusammenfinden und Aufgaben entwickeln. In sechs Gruppen wurden sechs Aufgaben erfunden, von denen nur eine den Kontext des Tangram-Spiels verlassen hatte. Alle sechs Aufgaben wurden am Ende der Doppelstunde präsentiert und von den Schülern ausgewertet. Jede Aufgabe wurde mit einer sorgfältig ausformulierten korrekten Lösung versehen. Im Unterschied zu den Initialaufgaben, die rein innermathematisch motiviert sind, verfassten alle Schülergruppen ihre Aufgaben als kleine Geschichten. Im Folgenden werden die einzelnen Aufgaben der Schüler mit Rückblick auf die theoretische Ausarbeitung des 2. Kapitels kommentiert.

Abbildung 2.14: Tangram-Haus

„Tangram-Haus“

Die Aufgabe in Abbildung 2.14 berichtet von einem Haus, dessen Zimmer verschiedene Anteile an dem gesamten Flächeninhalt haben. Die Seitenlänge seiner quadratischen Grundfläche beträgt 16 m. Der von den Schülern formulierte Arbeitsauftrag besteht darin, die Flächeninhalte der einzelnen Zimmer zu berechnen. So kommt es zu einer

Repräsentation von Brüchen durch inhaltsgleiche geometrische Figuren. Diese werden jedoch nicht rein innermathematisch thematisiert, sondern im Zusammenhang mit den Grundrissen der Zimmer eines Hauses. Somit wird ein Bruch durch verschiedene Zimmer, aber auch durch flächeninhaltsgleiche geometrische Figuren repräsentiert. Beispielsweise zeigen Büro, Küche, Kinderzimmer bzw. Parallelogramm, das kein Quadrat ist, Quadrat und Dreieck jeweils ein Achtel oder zwei Sechzehntel. Ein solches Haus kommt in der Realität kaum vor, erleichtert den Schülern dennoch den Übergang von der Geometrie zur Arithmetik, indem es die Inhalte in den Anschauungsraum der Einkleidung verlagert. Durch die Vielfalt der geometrischen Repräsentationen und außermathematischen Einkleidungen werden hier beispielsweise verschiedene Repräsentanten eines Bruches ($\frac{1}{8} = \frac{2}{16}$) als eine Äquivalenzklasse angesprochen.

„Zerbrochener Spiegel“

Anstatt Seitenlängen der einzelnen Teile vorzugeben, geben die Schüler in der Aufgabe in Abbildung 2.15 Flächeninhalte vor, was die Berechnung von Umfängen schwieriger macht. Da der Satz des Pythagoras erst viel später im Unterricht eingeführt wird, erforderte diese Aufgabe das Suchen nach eigenen Wegen. Diese führen über die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Quadrats, die bereits in den unteren Klassen der Grundschule bearbeitet wird. Durch Umkehrung der Fragestellung und Einkleidung in eine Geschichte wurde die Aufgabe eventuell schwieriger, blieb inhaltlich dennoch sehr nahe an der Initialaufgabe A4. Wie in A4 gibt es hier unendlich viele Möglichkeiten, ein Vieleck zu legen und die Frage nach dem Umfang des Spiegels zu beantworten. Daran lässt sich erneut der Unterschied zwischen den geometrischen Konzepten „Flächeninhalt“ und „Umfang“ verdeutlichen.

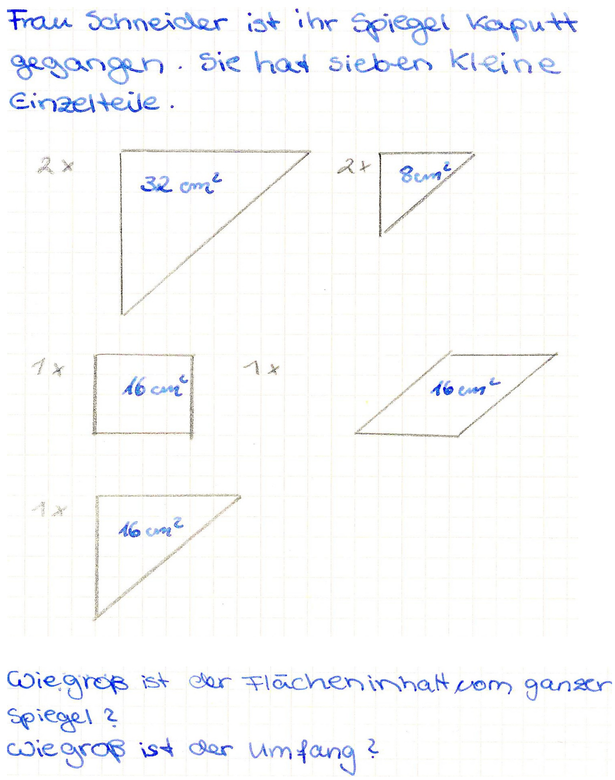


Abbildung 2.15: Zerbrochener Spiegel

„Schokolade“

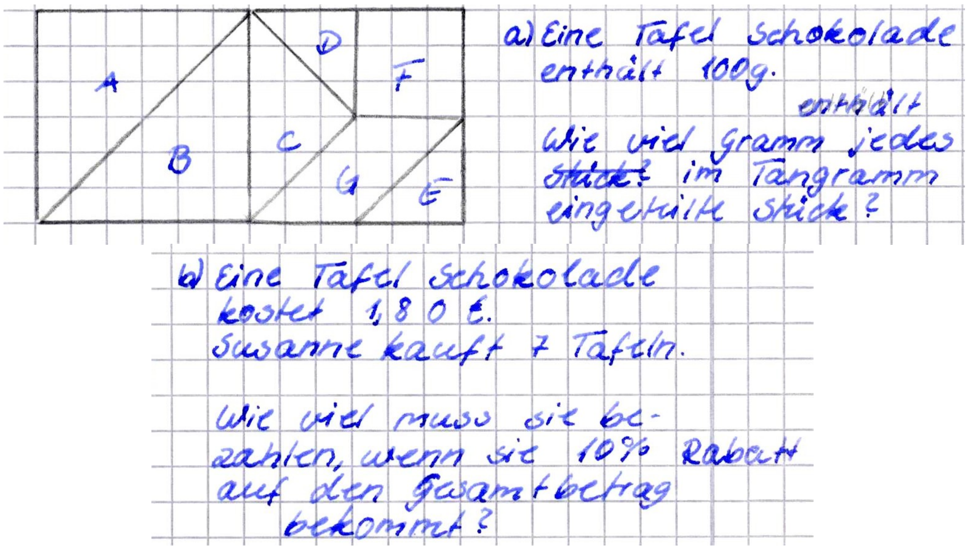


Abbildung 2.16: Tangram-Schokolade

In der folgenden Aufgabe (siehe Abb. 2.16) kommen Brüche und Prozente vor. Geometrie wird hier durch die Skizze angesprochen, jedoch nicht weiter thematisiert. Aus den Notizen unter der Aufgabe lässt sich erkennen, dass die Schüler rückblickend über die angesprochenen Themenbereiche reflektieren und die Aufgabe den inhaltlichen Bereichen Bruchrechnung, Prozentrechnung und dem Rechnen mit Größen zuordnen. Durch die verwendete Einkleidung einer „Schokoladentafel“ passen die Schüler auch die Form der quadratischen Lösungsfigur an eine Situation aus der Realität an.

Trotz des Versuchs der Lehrerin, auf die Wiederholung von Unterrichtsinhalten aus der Stochastik zu verzichten, beziehen sich zwei der sechs Aufgaben auf Inhalte, die zur Leitidee *Daten und Zufall* gehören. Auch die in den Hospitationsprotokollen dokumentierten Bemerkungen der Schüler zu diesen Aufgaben lassen vermuten, dass die Schüler, die die Aufgaben entwickelt hatten, den Inhalten der Stochastik gegenüber offen waren.

„Spiel“

In der Aufgabe „Spiel“ (siehe Abb. 2.17) werden explizit Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung angesprochen. Die Teilaufgabe a) lässt hierbei zwei Modellierungsmöglichkeiten zu. Sowohl die Anzahl der Steine wie ihr Flächeninhalt können bei der Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsmaßes verwendet werden. Durch die Bearbeitung der Aufgabe kann darüber hinaus der Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit angesprochen werden. Die Teilaufgabe b) fordert zum Experimentieren

In einem Säckchen sind 5 verschiedene Teilarten (7 Teile) eines Tangrams enthalten.

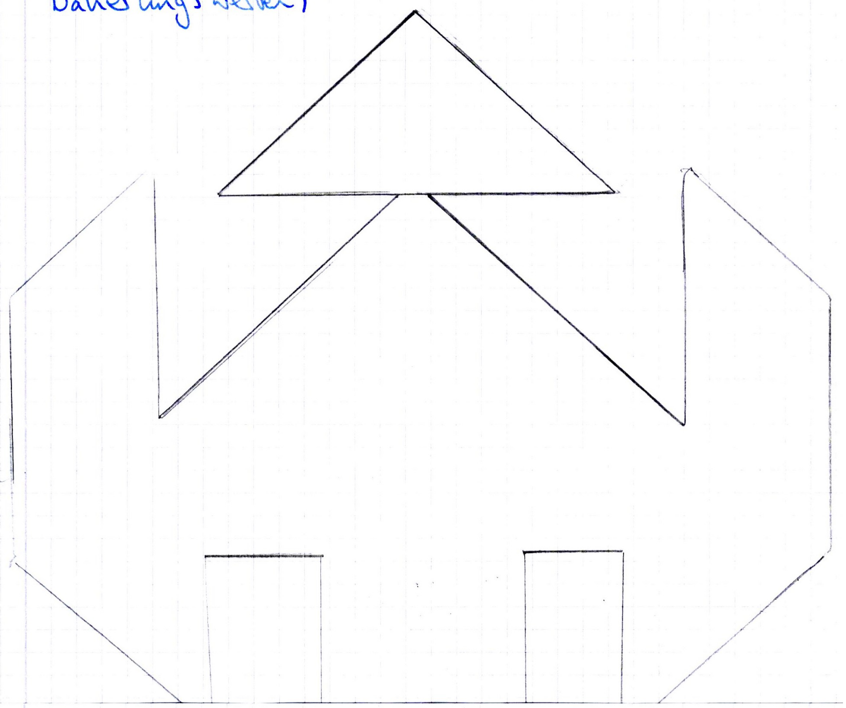
(a) Stell dir vor, du ziehst 25 mal ein Teil aus dem Säckchen. (Es wird unmittelbar nach dem es gezogen wurde wieder hinein gelegt!).
Schätze, welches der Teile am häufigsten und welche am seltesten gezogen werden würde. Begründe!

(b) Ziehe selbst 25 mal ein Teil aus dem Säckchen. Fertige eine Strichliste dazu an.

(c) Erstelle nun dazu ein Kreis-, Kurven- oder Säulendiagramm.

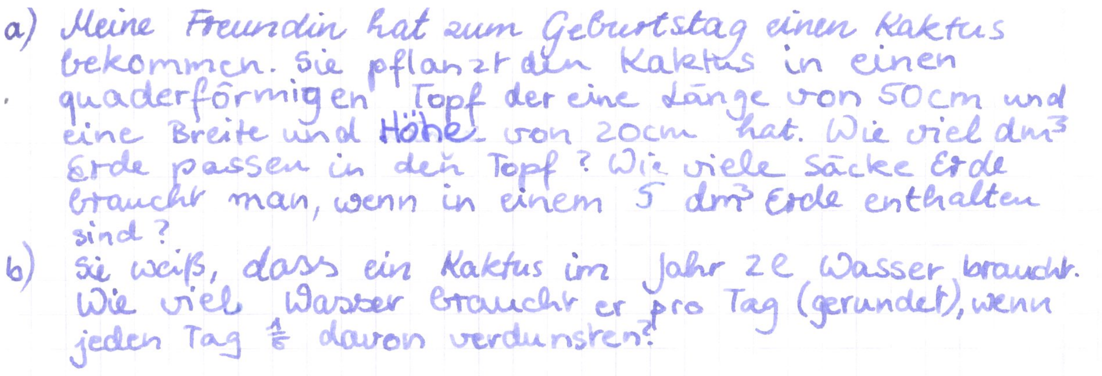
Abbildung 2.17: Spiel

Jens sitzt vor dem Computer. Er spielt ein spiel in dem er sich ein Raumschiff bauen muss und dann mit ihm kämpfen. Nun möchte er wissen wie groß der Flächeninhalt und Umfang ist. Er hat es anhand eines Tangrams im Maß-stab 1:1 detailgetreu nachgebaut. (Arbeite mit Näherungswerten)



b) Fritz will auf Jens' Raumschiff schießen. Er hat aber nur noch einen Schuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das er Jens trifft, wenn sein Computerbildschirm 578 cm² groß ist.

Abbildung 2.18: Raumschiff



a) Meine Freundin hat zum Geburtstag einen Kaktus bekommen. Sie pflanzt den Kaktus in einen quaderförmigen Topf der eine Länge von 50cm und eine Breite und Höhe von 20cm hat. Wie viel dm^3 Erde passen in den Topf? Wie viele Säcke Erde braucht man, wenn in einem 5 dm^3 Erde enthalten sind?

b) Sie weiß, dass ein Kaktus im Jahr 2 l Wasser braucht. Wie viel Wasser braucht er pro Tag (gerundet), wenn jeden Tag $\frac{1}{6}$ davon verdunsten?

Abbildung 2.19: Kaktus

auf. Schließlich werden in der Teilaufgabe c) Darstellungsmittel der beschreibenden Statistik zur Dokumentation der Ergebnisse angesprochen.

„Raumschiff“

In der Aufgabe „Raumschiff“ (siehe Abb. 2.18) verknüpfen Schüler Konzepte aus Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie konstruieren eine Aufgabe, in der sie nach Wahrscheinlichkeiten fragen. Es geht um die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Franz mit einem Schuss Jens’ Raumschiff trifft. Zum Beantworten dieser Frage gehört das Ausrechnen des Anteils des Flächeninhalts des Raumschiffes an dem gesamten Inhalt des Bildschirms. Die Flächeninhalte sind in „Raumschiff“ und in „Bildschirm“ eingekleidet. Solche sogenannte „Teileinkleidungen“ unterscheiden sich von denen durch Jahnke (2001, 5) geprägten Einkleidungen mathematischer Strukturen. Andererseits kann die Teileinkleidung „Raumschiff“ nicht nur die Motivation, sondern auch ein intuitives Verständnis des Konzeptes des Wahrscheinlichkeitsmaßes als Anteil an einem Flächeninhalt fördern. Dies wird in 3.2 aufgegriffen und weiter vertieft.

„Kaktus“

Abbildung 2.19 zeigt schließlich eine Aufgabe, in der die Schüler sich von dem Tangram-Kontext lösten und versuchten, in zwei Teilaufgaben Körperberechnung, Zuordnungen und Bruchrechnung miteinander zu verknüpfen.

Die von den Schülern erstellten Aufgaben zeigen, dass es mit Hilfe des Tangrams gelungen ist, nicht nur Inhalte aus Geometrie und Arithmetik innerhalb von zwei Doppelstunden zu wiederholen, sondern auch mit Elementen der Stochastik zu verbinden. Demzufolge kann das Tangram eine Stütze bei der Verbindung und Wiederholung von Unterrichtsinhalten bieten. Die meisten Schüler griffen sowohl beim Lösen der vorgegebenen Aufgaben als auch beim Erstellen von eigenen Aufgaben darauf zurück.

Unterrichtsinhalten einen besonderen Wert im Unterricht.

Durch die Initialaufgaben wurde den Schülern ein Netz von Aufgaben vorgeschlagen, das im Sinne der Definition eines „vernetzenden Unterrichts“ nach Hischer folgenden drei Aspekten genügen sollte (vgl. 2.3.3):

1. *Zweckaspekte*: Durch die Initialaufgaben aus dem Aufgabennetz sollten Verbindungen zwischen Unterrichtsinhalten verschiedener Leitideen hergestellt und aufgedeckt werden. Es wurde an Beispielen gezeigt, welche inhaltlichen Verbindungen zwischen verschiedenen Leitideen durch die Aufgaben angesprochen werden konnten.

2. *Handlungsaspekte*: Durch das Lösen der Aufgaben konnten die Schüler das Aufgabennetz „verdichten“ und „Maschen einbauen“, indem sie nach verschiedenen Lösungswegen suchten. Sie konnten darüber hinaus neue Verbindungen zwischen den Inhalten konstruieren, indem sie selbst Aufgaben entwickelten.

3. *Zustandsaspekte*: Mit Hilfe der Initialaufgaben und insbesondere der gewählten geometrischen Kontexte konnten die Schüler „ins Netz“ der Mathematik „gelockt“ werden. Im Netz bearbeiteten, erstellten und präsentierten sie gemeinsam Aufgaben. Die Schüler hatten aber auch die Möglichkeit, selbst Aufgaben zu formulieren. Somit wurden sie also nicht nur zu Bestandteilen und Benutzern, sondern in einem gewissen Maße zu Konstrukteuren des Aufgabennetzes. Dennoch konnte bei der beschriebenen Sozialform nicht verhindert werden, dass es Schüler gab, die die Möglichkeit nutzten, um der Arbeit auszuweichen. Dies lässt sich mit den Worten von Hischer als „Verschleiern“ und „Vortäuschen“ der Arbeit beschreiben (vgl. 2.3.3).

Zwischenfazit

Die Erprobung zeigte, dass theoretische Überlegungen folgende wichtigen Anregungen für die Gestaltung der Aufgabennetze liefern konnten:

- Gruppenarbeit als kooperative Lernform ist eine Möglichkeit, mit dem Zeit-Mangel im Unterricht umzugehen, kann jedoch zur Verwirrung und Überforderung von Schülern führen (vgl. 2.2.5, 2.3.1, 2.3.3).

- Die Konzentration auf eine geometrische Figur, ein Problem und vorbereitete Initialaufgaben kann den Schülern Orientierung und Halt geben und die zu wiederholenden Unterrichtsinhalte verbinden (vgl. 2.2.1, 2.2.3, 2.4).

- Das Tangram als ein geometrischer Kontext bietet Möglichkeiten, um an die Leitideen *Zahlen und Operationen* und *Daten und Zufall* anzuknüpfen.

- Geometrische Kontexte können zwischen deduktiven und anschaulichen Aspekten der Mathematik vermitteln (vgl. 2.2.1, 2.2.3, 2.4).

- Die Schüler sind bei entsprechender Vorbereitung durch das Lösen von Initialaufgaben in der Lage, gebietsübergreifende Aufgaben in Kooperation zu erstellen (vgl. 2.1).

- Einkleidungen können beim Herstellen von innermathematischen Bezügen hilfreich sein (vgl. 2.2.4, 2.2.5).

Es zeigt sich aber auch, dass die im Kapitel 2 vorgestellten theoretischen Ansätze einer weiteren Differenzierung bedürfen. Um eine Grundlage dafür zu schaffen, werden in 3.1 die Ansätze von Brinkmann und Fischer miteinander kombiniert. Für die Integration von Ergebnissen über Einkleidungen bedarf es einer weiteren Auseinandersetzung mit Ansätzen von inner- und außermathematischer Modellierung (siehe 3.2). Des Weiteren wird, um Gruppenarbeit als Mittel eines vernetzenden Mathematikunterrichts zu begründen ein Ausblick auf soziologische und philosophische Aspekte der Mathematik erfolgen (siehe 3.3). Schließlich werden in 3.4 neueste Ergebnisse zu sprachlichen Aspekten der Geometrie vorgestellt. Das Ziel dabei ist, neue, an Vorschläge von Klein, Lietzmann, Wittenberg, Wittmann und Vollrath anknüpfende – Erkenntnisse über die Rolle der Geometrie für einen beziehungshaltigen Mathematikunterricht zu gewinnen (vgl. 2.2). Daraus ergeben sich Folgerungen für die weitere Entwicklung von Aufgabennetzen, die in 3.5 festgehalten werden.

3 Vorschläge zur Integration, Weiterentwicklung und Erweiterung von theoretischen Ansätzen zu Vernetzungen im Mathematikunterricht

Im vorigen Kapitel wurde an einem Beispiel illustriert, wie die Definition des „Netzes“ und „vernetzenden Unterrichts“ nach Hischer zur Beschreibung und Konstruktion eines Aufgabennetzes sowie zur Reflexion seiner Erprobung herangezogen werden konnte. Auch wurde beobachtet, dass von Brinkmann beschriebene Modellvernetzungen sowohl in den Initialaufgaben als auch in den von Schülern aufgestellten Aufgaben vorkamen. Im Unterschied zu Brinkmann ging es den Schülern eher nicht um das Anwenden von Mathematik zum Lösen von außer- oder innermathematischen Problemen. Sie haben als Mittel zur Verbindung von Unterrichtinhalten Einkleidungen in außermathematischen Situationen herangezogen. Es konnte ebenfalls festgestellt werden, dass die von Kießwetter beschriebenen Gefahren der Verwirrung der Schüler durch Vernetzung in einer Praxissituation ernst zu nehmen sind. Deshalb stellt sich in diesem Kapitel die Frage nach der Integration der Ansätze von Kießwetter, Brinkmann und Hischer (siehe 2.3) mit dem Ziel, Begrifflichkeiten zu entwickeln, die Aufgabennetze beschreiben und somit sowohl Konstruktion wie auch Reflexion dieser fördern könnten (vgl. 2.5).

Wie lassen sich die Vorschläge von Brinkmann und Hischer aus der Perspektive der kognitiven Psychologie bewerten? Für Edelmann (2000, 157) treten Netzwerke bei größeren Wissensgebieten auf. Folgende drei Merkmale zeichnen sie aus:

1. *Sie sind hierarchisch organisiert.*
2. *Sie weisen an vielen Stellen eine multiple Repräsentation auf.*
3. *An manchen Begriffen sind zusätzlich noch Episoden angegliedert.*

Diese Definition ist nicht mathematikspezifisch, sie umfasst jedoch verschiedene von Kießwetter, Brinkmann und Hischer betonte Aspekte von Vernetzungen im Mathematikunterricht. So kann hierarchische Anordnung des mathematischen Wissens als eine Art der Vernetzung bei Brinkmann und als Voraussetzung von Vernetzung bei Hischer angesehen werden. Verschiedene Möglichkeiten, mathematisches Wissen zu repräsentieren werden bei Kießwetter und Brinkmann betont. Sie tragen zu den Querverbindungen in dem hierarchisch strukturierten Wissen bei. Edelmann (2000, 160) macht darauf aufmerksam, dass verschiedene Repräsentationsmodi sich zwar analytisch unterscheiden lassen, in Wirklichkeit jedoch eher als Hybridformen auftreten. Durch Hierarchien und multiple Repräsentationen werden in den Begriffsnetzen mit den Worten von Edelmann (2000, 157) metaphorisch gesprochen „Brücken geschlagen". U.a. durch an manchen Begriffen angegliederte Episoden wird das Wissen differenzierter und das Netzwerk unübersichtlicher. Demnach behauptet Edelmann, dass vernetztes Wissen zwei Komponenten aufweist: eine Oberflächenstruktur und verschiedene Schichten in einer Tiefendimension. Für den einzelnen Schüler scheint demnach ein spezifischer, optimaler Differenzierungsgrad gegeben. Diese Ansicht steht im Einklang mit der Behauptung Kießwetters, dass erfolgreicher Mathematikunterricht sich zwischen den Polen Klarheit durch Isolierung der Elemente und Verwirrung durch Vernetzung stattfinden kann. Wie Kießwetter sieht auch Edelmann Diskrepanzen zwischen dem linear angeordneten sprachlichen und dem vernetzten Wissen. Demnach lassen sich die Ansätze von Kießwetter, Brinkmann und Hischer auf dem Hintergrund aktueller Kognitionspsychologie einordnen (vgl. Edelmann 2000, 156ff.).

Angesichts der Ausführungen in 2.5 wird in 3.1 die Definition „vernetzenden Unterrichts" von Hischer zum Ausgangspunkt der Überlegungen gewählt und mit den Kategorien, die Brinkmann erstellt hat, kombiniert (vgl. 2.3.2, 2.3.3). Dem folgt eine ergänzende Modifikation der Kategorien von Brinkmann in 3.2. Ausgehend davon folgen in 3.3 Überlegungen zu sozialen Aspekten der Mathematik. Dadurch werden von Brinkmann und Hischer vorgeschlagene Begrifflichkeiten um die Betrachtung der sozialen Ebene im Mathematikunterricht ergänzt. So sollen im Unterricht hergestellte Vernetzungen bei der Auswertung nicht nur aus der Perspektive von einzelnen Schülern betrachtet werden. Es soll vielmehr rückblickend gezeigt werden, welche verschiedenen fachinhaltlichen Bezüge und Interpretationen eines mathematischen Objekts in der Lerngruppe als Ganzes thematisiert wurden. In 3.4 folgen Ausführungen zu den linguistischen Aspekten der Mathematik, die einen differenzierteren Blick auf die Kategorisierungen von Brinkmann erlauben, um anschließend Anregungen für den Unterricht in 3.5 daraus zu schöpfen.

3.1 Kombination von Elementen aus den Ansätzen von Hischer und Brinkmann

Die Begrifflichkeiten von Hischer und Brinkmann stimmen insofern überein, dass mathematische Objekte (Definitionen, Sätze, Beispiele, Themen) als Knoten in einem Netz bzw. Netzwerk interpretiert werden können. Das setzt voraus, dass diese Objekte sich voneinander abgrenzen lassen. Dies ist durch die Einteilung der Inhalte in Lehrplänen, Lehrbüchern oder auch Unterrichtseinheiten möglich, auch wenn es inhaltliche Überschneidungen gibt.

Kanten stehen bei Brinkmann für Relationen zwischen zwei Knoten und somit für Vernetzungen. Im Unterschied zu Brinkmann reicht für Hischer eine Verbindung zwischen zwei Objekten bzw. eine Kante zwischen zwei Knoten nicht aus, um eine Vernetzung zu definieren. Nach seinen Begrifflichkeiten ist das Vorliegen von Maschen, die aus mindestens vier Knoten bestehen, die durch mindestens vier Kanten miteinander verbunden sind, entscheidend. Dies führt dazu, dass für Hischer zwischen je zwei Knoten in einem Netzwerk mehrere Wege möglich sind, wenn der entsprechende Graph endlich und zusammenhängend ist. Gerade die Möglichkeit, eine mathematische Aufgabe oder ein mathematisches Problem auf verschiedenen Wegen zu lösen, ein Objekt auf verschiedene Arten zu interpretieren und verschiedene Inhalte auf unterschiedliche Weisen miteinander zu verbinden, soll auch in der vorliegenden Arbeit als eine wichtige Voraussetzung eines „vernetzenden Unterrichts“ betrachtet werden (vgl. 2.3.2, 2.3.3). Diese Möglichkeiten werden in Form von fachinhaltlichen Analysen der jeweiligen mathematischen Kontexte ermittelt und diagrammatisch als den Aufgabennetzen zugrunde liegende Themenkreise dargestellt. Im nächsten Schritt wird gemeinsam mit den Lehrern und im Hinblick auf konkrete Schülergruppen eine Auswahl aus diesen Möglichkeiten getroffen und in Initialaufgaben operationalisiert. Anschließend werden diese Initialaufgaben zu Aufgabennetzen kombiniert und bei den Schülern ausprobiert. Somit werden den Schülern verschiedene Möglichkeiten von Verbindungen und Vernetzungen im Unterricht angeboten. In diesem letzten Schritt zeigt sich, inwiefern ein „vernetzender Unterricht“ stattfinden konnte oder nicht (vgl. 4.1, 4.2). Brinkmann (2002, 108) spricht in diesem Fall von verschiedenen curricularen Rahmen und unterscheidet zwischen „intendierten“, „implementierten“ und „erreichten Curricula“. Bereits in 2.5 wurde gezeigt, dass beim Einsatz von Aufgabennetzen in den durch die Schüler „erreichten Curricula“ Verbindungen und Vernetzungen entstehen können, die nicht direkt vom Rahmenlehrplan oder der Lehrperson intendiert und auch nicht direkt in den Initialaufgaben implementiert waren (vgl. auch 4.1 und 4.2).

Die Kategorisierungen von Brinkmann helfen, mathematische Kontexte auf ihr Potenzial im Hinblick auf einen „vernetzender Unterricht“ zu ermitteln, in den Aufgaben zu implementieren und im Unterricht realisierte Vernetzungen zu beschreiben. Sie können nicht nur auf Verbindungen, sondern auch auf Vernetzungen im Sinne von Hischer angewandt werden. So können beispielsweise beim Lösen einer arithmetischen Aufgabe durch „Geometriesierung“ verschiedene Verbindungen innerhalb eines oder mehrerer mathematischer und außermathematischer Objekte oder Modelle hergestellt werden. Es

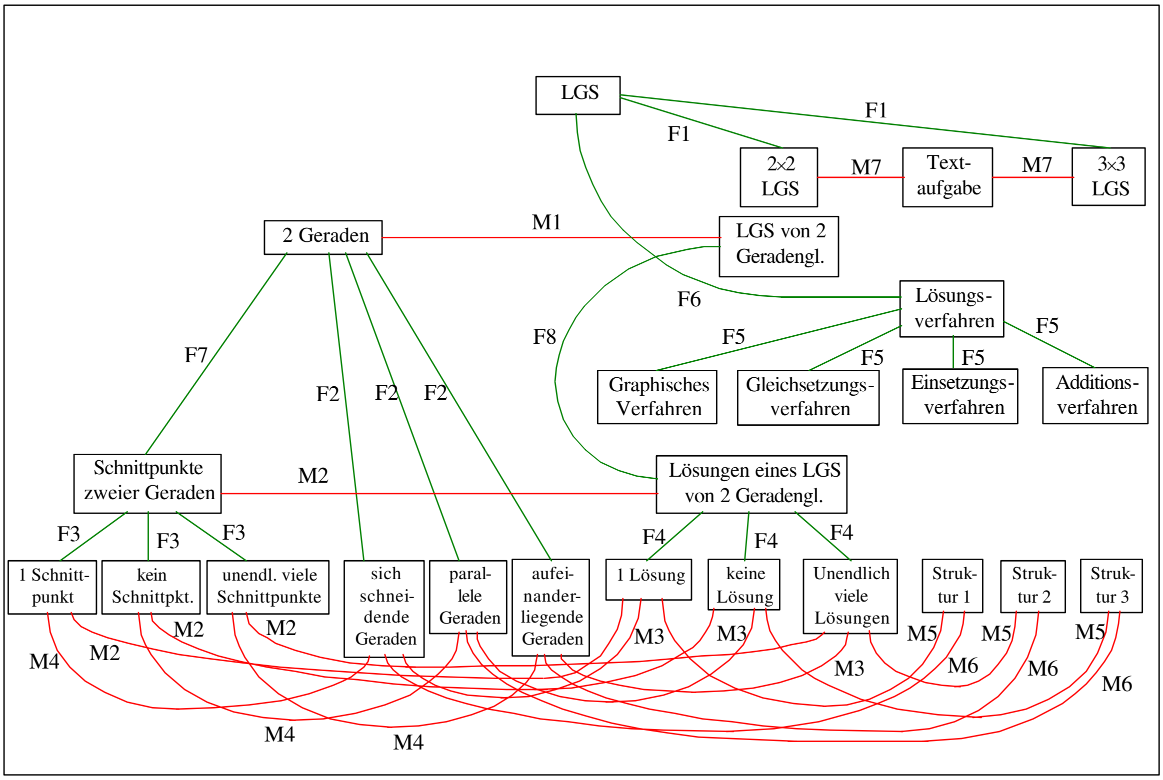


Abbildung 3.1: Netzwerkbeispiel nach Brinkmann (2002, 207)

kann also von einer Modellvernetzung und nicht nur lediglich von einer Modellverbindung gesprochen werden.

So kann es beim Lösen von linearen Gleichungssystemen, die Brinkmann als fachlichen Gegenstand ihrer Untersuchung wählt, mehrfach zum Wechsel zwischen Objekten aus der Geometrie und aus anderen Gebieten kommen. Hier werden Lösungen von Gleichungssystemen als Schnittpunkte von Geraden dargestellt. Die Schnittpunkte können wiederum als Zahlenpaare interpretiert und beispielsweise zur Kontrolle von Lösungen in die entsprechenden Gleichungen eingesetzt werden. Ein derartiger Wechsel lässt sich auch an dem von Brinkmann erstellten *Concept Map* veranschaulichen (siehe Abb. 3.1). Im Einklang damit weist Hischer darauf hin, dass die von Brinkmann vorgeschlagenen *Concept Maps* auch seinen Definitionsvorschlägen von Vernetzung genügen (Hischer 2010a, 185).

Wenn eine Relation oder Verbindung zu einer Kante wird, ist es schwierig, sie qualitativ zu beschreiben. Es sei denn, die Kanten werden wie beispielsweise bei Brinkmann mit den Bezeichnungen aus ihrer Klassifikation beschriftet (siehe Abb. 3.1). Die Zuordnung zu den Kategorien erfolgt bei Brinkmann nicht über die Graphentheorie, sondern wie beispielsweise bei Klein, Lietzmann oder Vollrath über inhaltliche Beispiele und über diese Beispiele illustrierende Aufgaben, was wiederum interpretativen Charakter hat ausgehen, werden im Folgenden *Einkleidungen* als eine weitere Unterkategorie von Modellvernetzungen vorgestellt. Dabei wird an mathematikdidaktische Ansätze zur Modellbildung angeknüpft (vgl. 2.2.4, 2.2.5, 2.3.2, 2.3.3).

3.2 Vernetzen durch Modellieren oder Einkleiden

Wie in 2.3.2 angekündigt, wird im Folgenden eine Erweiterung des Modellierungsbegriffs für die Mathematikdidaktik angestrebt. Das Ziel dieser Erweiterung ist es, Einkleidungen als ein didaktisches Phänomen zu beschreiben, das bei den bereits vorgestellten Erprobungen beobachtet werden konnte. Dies soll wiederum die Formulierung von Vorschlägen für die Praxis sowie ihre Reflexion unterstützen.

3.2.1 Ausblick in die allgemeine Modelltheorie

Um unangemessenen Verengungen des Begriffs „Modell“ vorzubeugen, bietet Filler (2009, 4ff.) einen Ausblick in die allgemeine Modelltheorie an. Dabei bezieht er sich auf Stachowiak[1] als einen Vertreter der Perspektive des Neopragmatismus. Demnach werden Modelle durch folgende drei Merkmale beschrieben (vgl. Stachowiak 1973, 131ff.):

- *Abbildungsmerkmal:* Modelle sind stets Modelle von etwas, nämlich Abbildungen, Repräsentationen natürlicher oder künstlicher Originale, die selbst wieder Modelle sein können.
- *Verkürzungsmerkmal:* Modelle erfassen im Allgemeinen nicht alle Attribute des durch sie repräsentierten Originals, sondern nur solche, die den jeweiligen Modellerschaffern und/oder -benutzern relevant erscheinen.
- *Pragmatisches Merkmal:* Modelle sind nicht nur Modelle von etwas, sondern auch Modelle für jemanden; sie dienen einem bestimmten Zweck.

Die in der Beschreibung des ersten Merkmals erwähnten Originale „können dem Bereich der Symbole, der Welt der Vorstellungen und der Begriffe oder der physischen Wirklichkeit angehören“ (Stachowiak 1973, 131). Nach dieser Auffassung müssen Originale nicht zwingend der physischen Realität angehören. Sie können demzufolge auch als mathematische Ideen in der Welt der Vorstellungen angesiedelt sein. Entscheidend ist jedoch, dass es sich hierbei um zwei voneinander trennbare, aber auch gegeneinander austauschbare Repräsentationsebenen handelt und dass Modelle und Originale wenigstens in einem Teil ihrer Eigenschaften ähnlich sind. Der im dritten Merkmal erwähnte Zweck

[1] Stachowiak war als Begründer einer allgemeinen Modelltheorie nicht nur ein Philosoph, sondern auch ein Mathematiker.

kann beispielsweise ein besseres Verständnis, Übersichtlichkeit, aber auch ästhetischer Genuss der Repräsentation sein (Stachowiak 1973, 131).

3.2.2 Der Modellbegriff in der Mathematik

Der Modellbegriff, der in der Mathematik verwendet wird, genügt den Anforderungen der allgemeinen Definition von Stachowiak, wird häufig jedoch enger gefasst:

> *„In der Mathematik versteht man unter einem Modell (für ein Axiomensystem) jede Interpretation der Grundbegriffe des Axiomensystems, durch die Axiome in wahre Aussagen übergehen. Zu einem Axiomensystem kann es mehrere isomorphe Modelle geben.“* (Brinkmann 2002, 49)

So können beispielsweise reelle Zahlen als Äquivalenzklassen von rationalen Cauchy-Folgen, Dedekindsche Schnitte oder Äquivalenzklassen von Intervallschachtelungen repräsentiert werden. In den empirischen Wissenschaften ist der Modellbegriff weiter gefasst. Dort dienen Brinkmann zufolge axiomatische Theorien oder ihre Aussagen als sogenannte „Strukturmodelle“ oder Formalisierungen von außermathematischen Gesetzmäßigkeiten. Mathematische Axiomensysteme oder mathematische Aussagen können auch innerhalb der Mathematik im Sinne von „Strukturmodellen“ angewandt werden (vgl. Brinkmann 2002, 49ff.). So können beispielsweise beim Beweis der Fermatschen Vermutung verwendete Modularformen als Modelle für elliptische Kurven aufgefasst werden. Kramer spricht in diesem Zusammenhang von Brücken zwischen verschiedenen Welten innerhalb der Mathematik (vgl. Kramer 1995, 18ff.).[2]

[2] Unter den heuristischen Strategien, die Berufsmathematiker verwenden, führt Schwarz (2006, 4) sogenannte *Systemwechsel* auf. Anschließend illustriert er diese Strategie an verschiedenen Beispielen für Probleme, die sich durch den Wechsel zwischen Geometrie und Algebra sowie den Wechsel zwischen diversen mathematischen Disziplinen und der Linearen Algebra lösen lassen. Hußmann und Oldenburg (2008, 3ff.) sprechen von der Kombination algebraischen und geometrischen Denkens oder Wechseln zwischen sogenannten algebraischen und geometrischen Bezugssystemen in der Schulmathematik und illustrieren dies ebenfalls an Beispielen. Roth (2008, 17ff.) beschreibt gleichermaßen an Beispielen von Termen, Formeln, Figuren und Funktionen, wie Geometrie und Algebra durch systematische Variation vernetzt werden können. Was unter einem System verstanden wird, wird hierbei nicht explizit definiert und wäre aus den Kontexten der jeweilige Texte und durch die darin enthaltene Beispiele zu erschließen. Der Begriff „System“ wird in der Mathematikdidaktik häufig mit oder ohne Bezug auf verschiedene systemtheoretische Ansätze gebraucht. So bauen beispielsweise Ossimitz und Lapp ihre Einführung in systemgerechtes Denken und Handeln auf den Arbeiten von Bartalanfy, Watzlawick und weiteren Systemtheoretikern auf, auf die sie explizit verweisen (Ossimitz und Lapp 2006, 72). Eine differenzierte Auseinandersetzung mit dem Begriff „System“ bei Klein, Vollrath, Kießwetter und weiteren Autoren sowie ihre Integration in die weiteren Forschungsergebnisse bleibt nach dem Stand der aktuellen Forschung noch aus. Eine Ausarbeitung dieser Art zum Begriff „System“ würde aber auch den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen. Deshalb wird in dieser Arbeit versucht, die Bedeutung des Wortes „System“ aus den Kontexten der jeweiligen Arbeit und mit Hinblick auf die Fragestellung der Arbeit zu erschließen. Ähnlich wie mit der Metapher „System“ verhält es sich mit der Metapher „Struktur“. Etwas anders sieht es in der Mathematikdidaktik mit dem Begriff „Modell“ aus.

3.2.3 Modellierungskreisläufe für den Mathematikunterricht

Auch wenn verschiedene Autoren „Modelle“ unterschiedlich interpretieren, lassen sich anhand von dazu ausgearbeiteten Modellierungskreisläufen Vergleiche erstellen und Wesensmerkmale des Modellierbegriffes für den Mathematikunterricht herausarbeiten. Deshalb werden Modellierungskreisläufe zum Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen gewählt. Das Ziel dieses Abschnittes besteht unter anderem darin, einen Modellierungskreislauf auszuwählen, der entsprechend dem erweiterten Modellierungsbegriff modifiziert und zur Beschreibung von bei der Erprobung sichtbar gewordenen Phänomenen herangezogen werden kann.

Baptist und Winter (2001, 60) verstehen unter einem Modell eine „begriffliche Konstruktion, die geeignet ist, auf rationale Art zu interpretieren (deskriptive Modelle) oder das Verfolgen von Zwecken systematisch zu organisieren (normative Modelle)“. Für Zais und Grund (1991, 7) ist mathematisches Modellieren „das vollständige Übersetzen einer Strukturdarstellung in die Sprache der Mathematik“. Auch Neubrand (2002, 104) spricht vom Modellieren als „Übersetzen“ von einem Bereich in einen anderen. Dieser Modellierungsbegriff ist auch innerhalb der Mathematik anwendbar. Entscheidend dabei ist, dass im Einklang mit der allgemeinen Modelltheorie eine Trennung in Modellebene und Originalebene möglich ist und dass in beiden Bereichen Ähnlichkeiten erkennbar sind (vgl. Zais und Grund 1991, 6).

Brinkmann greift in ihrer Arbeit dieses Verständnis von Modellierung auf. Demnach lassen sich Aufgaben, Aussagen oder Probleme bzw. ihre Teilprobleme in der Sprache eines Modells formulieren, aber auch in die Sprache eines anderen Modells übertragen. Derartige Übersetzungen werden bei Brinkmann als Modellierungen bezeichnet. Formuliert in der Sprache eines Modells, können viele Probleme demnach durch die Wiedergabe in die Sprache eines anderen Modells gelöst werden. So können beispielsweise lineare Gleichungssysteme durch Umsetzung in die Sprache der Geometrie graphisch gelöst werden. In diesem Fall wird von „Geometrisierung“ gesprochen (vgl. Brinkmann 2002, 50). Wie Zais und Grund (1991, 1) verwendet Lambert (2006, 4)[3] die Metapher „Übersetzen“, um Modellierungsprozesse im Mathematikunterricht zu beschreiben:

> *„Ein Problem aus der Welt übersetzen wir in unsere Sprache Mathematik und verarbeiten es dort.“* (Lambert 2006, 4)

Lambert betrachtet „Schönheit“ im Sinne einer „übergeordneten Struktur“ als ein Kriterium zum Vergleich verschiedener Modellierungskreisläufe. Die „Schönheit“ bestehe nach Lambert in der Einteilung eines Modellierungskreislaufs in Modell- und Originalebene auf der einen sowie Problem und Lösung auf der anderen Seite. Diese klare Einteilung fehlt seiner Meinung nach beispielsweise dem Modellierungskreislauf von

[3] Die Auswahl der von Lambert gewählten Beispiele wird hier durch die Modelle von Zais und Grund bzw. Brinkmann, Ossimitz und Lapp ergänzt.

	PROBLEM		**LÖSUNG**
MATHEMATIK	**Modell**	**→*deduzieren*→**	**Konsequenzen**
	↑ ***modellieren, mathematisieren*** ↑		↓ ***interpretieren*** ↓
WELT	**Situation**	**←validieren←**	**Ergebnisse**

Abbildung 3.2: Modellierung nach Schupp (1888, 11)/Lambert (2006, 5)

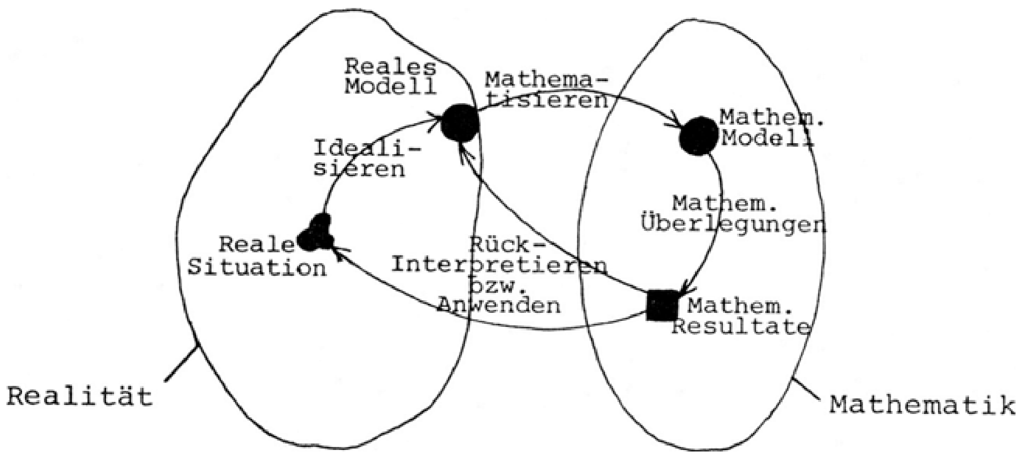


Abbildung 3.3: Modellierung nach Blum und Törner (1983, 248)

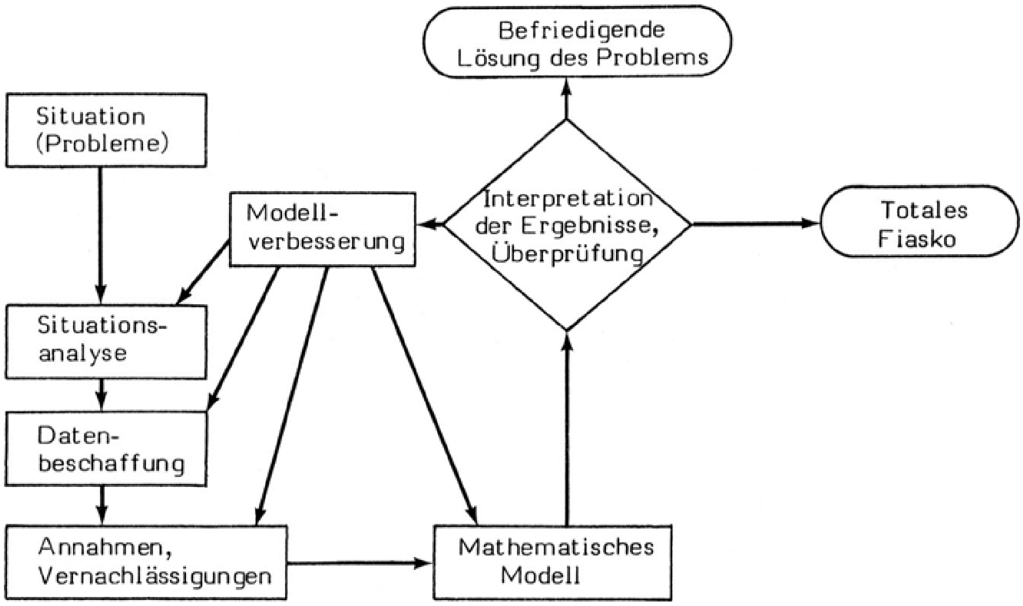


Abbildung 3.4: Modellierung nach Fischer und Malle (1985, 101)

Fischer und Malle (1985, 101), wogegen sie sich vor allem bei Schupp (1988, 11), aber auch bei Blum und Törner (1983, 247) finden lässt.[4] Dabei steht eine von beiden Ebenen für die Mathematik. Die mathematische Ebene beinhaltet in diesen Fällen die Modelle.

Die Bezeichnungen des zur Mathematik komplementären Teils variieren zwischen *Situation* (Fischer und Malle 1985, 101), *Welt* (Schupp 1988, 11), und *Realität* (Blum und Törner 1983, 247). Mathematik wird beispielsweise bei Blum und Törner mit einer als eine Ellipse anmutenden Figur symbolisiert. Die außermathematische Realität wird durch ein Gebilde dargestellt, welches keine bekannte geometrische Figur ist. Dies kann so interpretiert werden, dass Mathematik als etwas Regelmäßiges und etwas Greifbares erscheint. Die Realität ist demnach im Gegensatz zur Mathematik komplexer und schwerer greifbar.[5]

In den Abbildungen 3.5 und 3.6 werden verschiedene Möglichkeiten, Modellierungsprozesse im Mathematikunterricht aufzufassen, illustriert. So handelt es sich in 3.5 um das Lösen von außermathematischen Problemen mit Hilfe von Mathematik. Mathematik wird auf außermathematische Fragestellungen angewandt. In diesem engeren Sinne ist

[4] Ob eine klare Trennung in zwei Bereiche sinnvoll ist, entscheidet sich in Abhängigkeit von dem zu lösenden bzw. zu beschreibenden Problem und dem Problemlöser. Es gibt sicherlich Situationen, die sich mit Hilfe des Modellierungskreislaufs von Fischer und Malle besser strukturieren lassen und deshalb „schöner“ sind.

[5] Aus der Sicht eines Mathematikdidaktikers auf die Schulmathematik und die Realität außerhalb von ihr trifft dies mit großen Wahrscheinlichkeit zu.

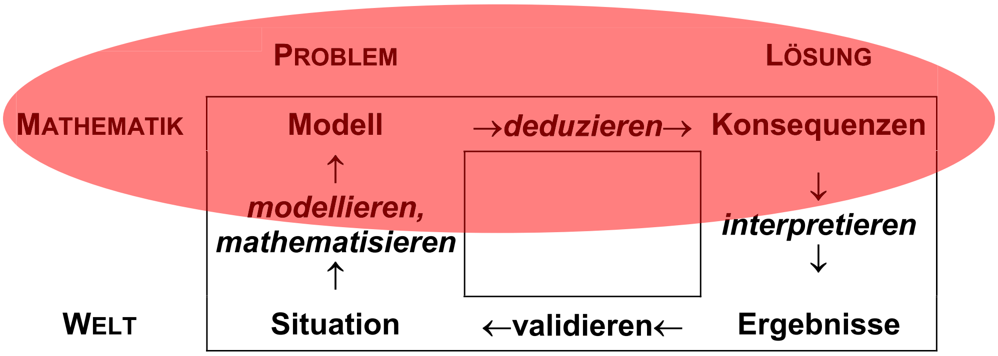


Abbildung 3.5: Die Welt wird durch Mathematik modelliert

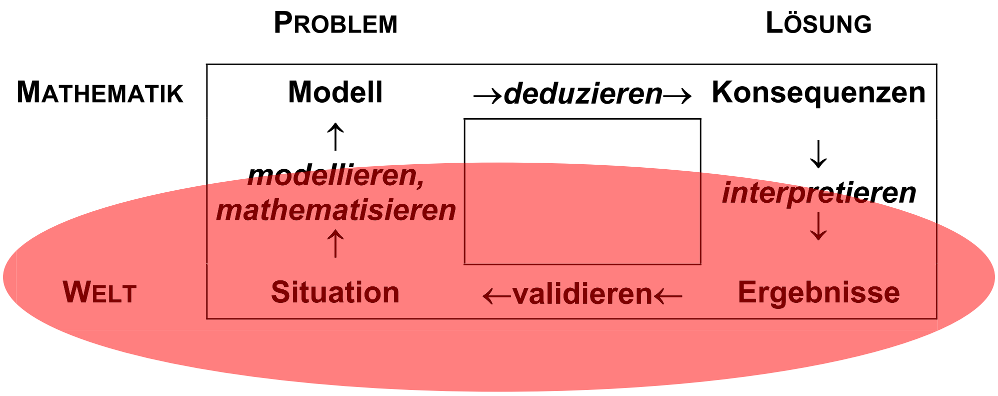


Abbildung 3.6: Mathematik wird durch die Welt modelliert

der Modellierungsbegriff aktuell sehr verbreitet (vgl. beispielsweise Blum und Törner 1983, 247; Baptist und Winter 2001, 61). Im Gegensatz dazu stellt 3.6 die Anwendung der außermathematischen Welt durch die Mathematik dar. Hierbei erscheinen bestimmte außermathematische Sachverhalte in Bezug auf die Situation und den Betrachter (beispielsweise Schüler) weniger komplex als die Mathematik, die erst noch zu verstehen ist. Diese Überlegung bietet einen Ausgangspunkt für die Legitimation von Einkleidungen mathematischer Phänomene in außermathematische Sachverhalte im Mathematikunterricht.

Neben den Möglichkeiten, Grenzen zwischen Mathematik und der Welt zu ziehen, bestehen innerhalb der Mathematik verschiedene Möglichkeiten, Grenzen zwischen den mathematischen Welten zu ziehen. Das ist möglich, weil Mathematik sehr stark ausdifferenziert ist (vgl. Heintz 2000, 194). Hierbei werden verschiedene „mathematische Welten“, wie Kramer (2000, 169ff.) sie als Mathematiker bezeichnet, innerhalb eines Beweises ineinander übersetzt. Das Ziel dabei ist, ein innermathematisches Problem zu lösen (vgl. 3.3).

Innermathematisches Modellieren in der Schule

Modellierungsprozesse können z.B. als „Wandern zwischen *Geometriewelt* und *Algebrawelt*“ oder „Übersetzen aus der *Geometriesprache* in die *Algebrasprache*“ beschrieben werden.

Während die Algebra häufig als Hilfsmittel der Geometrie herangezogen wird, verlaufen Veranschaulichungen von binomischen Formeln, Brüchen und Wahrscheinlichkeiten in eine andere Richtung (vgl. 2.2.3, 2.5). In 2.2 wurde gezeigt, dass geometrische Veranschaulichungen von algebraischen und arithmetischen Begriffen und Gesetzmäßigkeiten eine lange Tradition haben, deshalb wird hierauf nicht weiter eingegangen. Beispiele für geometrische Veranschaulichungen von Elementen der Stochastik wurden ansatzweise in 1.2und 2.5 vorgestellt. Weitere Beispiele für die Geometrisierungen von Stochastik werden bei der Konstruktion des Aufgabennetzes „Pythagorasbaum“ in 4.1 vorgestellt.

In den bereits beschriebenen Erprobungen lassen sich weitere Beispiele von Vernetzungen durch innermathematische Modellierungen finden. So werden in der Lernumgebung „Tangram“ für die 6. Klasse Brüche sowie ihre Addition und Subtraktion mit Hilfe von geometrischen Figuren veranschaulicht (vgl. 2.5). Auch Wahrscheinlichkeiten werden dort durch Flächeninhalte „modelliert“. Zais und Grund (1991, 8) unterstreichen, dass nicht nur Aufgaben, bei denen alle Schritte des Modellierungsprozesses durchlaufen werden, sondern auch Aufgaben, die sich nur auf Teilschritte des Modellierungskreislaufes beziehen, im Unterricht von Bedeutung sind (vgl. Greefrath 2010, 64ff.). So ist die Wahl des Wahrscheinlichkeitsmaßes in der Schüleraufgabe „Raumschiff“ (siehe Abb. 3.8) schwer zu validieren. Dafür hatten die Schüler einen anderen sehr wichtigen Teilschritt vollzogen, indem sie ein Modell für das Wahrscheinlichkeitsmaß selbst gewählt hatten. Nach Weber (2000, 109) gehören Aufgaben, deren Lösung die Anwendung von Wissen aus verschiedenen mathematischen Gebieten erfordert, zu den Aufgaben mit einem höheren Komplexitätsgrad. Dies ist seiner Meinung nach auch dann der Fall, wenn diese Hilfsmittel sehr elementar sind.[6] Insofern können die Aufgaben aus 2.5 bzw. daran anschließende Fragestellungen als komplexe Aufgaben, die teilweise innermathematische Modellierung erfordern, betrachtet werden.

[6] Beispiele dafür liefern Extremwertaufgaben (siehe Stowasser 1991). Das sind z.B. Aufgaben, die Fragen nach maximalen bzw. minimalen Flächeninhalten aufwerfen. Dass diese Aufgaben mit geometrischen und algebraischen Kenntnisse aus der 7. und 8. Klasse ohne Differenzial- und Integralrechnung bearbeitet werden können, zeigen Webers Beispiele (2000, 109ff.).

Alle Aufgaben des Aufgabennetzes aus 2.5 bezogen sich auf die Steine des Tangram-Spiels, die in einem strengeren Sinne keine mathematischen Objekte sind. Eine Identifikation der Steine als geometrische Figuren bedarf deshalb einer bewussten Entscheidung. So kann von einem Stein angenommen werden, dass er ein Quadrat oder ein Prisma ist. Zunächst kann die Annahme lediglich durch die Anschauung gerechtfertigt oder widerlegt werden. Gestützt werden kann diese Annahme durch Nachmessen. Es geht hier also um Aspekte der Modellierung. Ein Tangram-Stein wird in diesem Fall durch ein Quadrat modelliert. Die anderen Steine veranschaulichen wiederum mathematische Figuren wie Dreieck, Parallelogramm und Quadrat. Schließlich können Formeln helfen, die Grenzen der Anschauung zu überwinden. Insofern kann hier von Modellierungsprozessen gesprochen werden, die nicht nur zwischen Geometrie und anderen Gebieten der Mathematik ablaufen, sondern die Grenzen der Mathematik verlassen.

Von den verschiedenen „Welten“ innerhalb der Mathematik sowie dem „Übersetzen“ zwischen ihnen sprechen metaphorisch ebenfalls vom Hofe und Jordan (2009), wenn sie sich mit Beziehungen zwischen Geometrie und Algebra im Mathematikunterricht beschäftigen. Sie bezeichnen die dabei ablaufenden Prozesse ebenfalls wie Zais als innermathematische Modellierungen. Während „primäre Grundvorstellungen“ vom Hofe und Jordan (2009, 5) zufolge zwischen der Welt außerhalb der Mathematik und der Mathematik vermitteln, sollen „sekundäre Grundvorstellungen“ zwischen den Welten innerhalb der Mathematik vermitteln. Worin unterscheiden sich jedoch primäre und sekundäre Grundvorstellungen?

> *„Im Laufe der Schulzeit werden primäre Grundvorstellungen – das sind solche, die ihre Wurzeln in Handlungserfahrungen aus der Vorschulzeit haben – immer mehr durch sekundäre Grundvorstellungen ergänzt, die aus mathematischer Unterweisung stammen.“* (vom Hofe 2003, 6)

So handelt es sich vom Hofe zufolge beispielsweise beim Verteilen um eine Erfahrung, die den Schülern bereits vor dem Schulanfang bekannt ist. Als Beispiel für sekundäre Grundvorstellungen kann der Zahlenstrahl dienen, den die Schüler aus dem Mathematikunterricht kennen (vgl. vom Hofe 2003, 6). Die in 2.5 dargestellten Ergebnisse zeigen, dass der Zusammenhang zwischen zwei mathematischen Bereichen nicht direkt und innermathematisch sein muss. So werden in der Schüleraufgabe (siehe Abb. 2.14, S. 79) beispielsweise Brüche nicht direkt durch Flächeninhalte geometrischer Figuren, sondern zunächst als Grundrisse von Zimmern vorgestellt. Deshalb können primäre oder außermathematische Grundvorstellungen durch Einkleidungen ebenfalls bei der Übersetzung zwischen innermathematischen Welten hilfreich sein.

3.2.4 Einkleidung bzw. inverse Modellierung

In den vorigen Kapiteln wurde gezeigt, dass Lietzmann, Wagenschein, Wittenberg, Freudenthal, Wittmann und Vollrath die Bedeutung von Analogien aus der Alltags- und Lebenswelt der Schüler für beziehungshaltige Mathematik hervorgehoben haben. Diese können als außermathematische Modelle von mathematischen Problemen verstanden werden. Die Mathematik wird in die außermathematische Situation nicht mit dem Ziel übersetzt, ein außermathematisches Problem zu lösen. Das Ziel hierbei besteht darin, Mathematik durch außermathematische Interpretationen verständlicher zu machen oder gar mit außermathematischen Mitteln ein mathematisches Problem zu lösen (vgl. 2.2.4, 2.3.2, 2.5).

In der Abbildung 3.6 (S.96) wird die aus der Perspektive des Schülers in bestimmten Situationen weniger komplexe außermathematische Welt als Mittel zum Verständnis von komplexerer Mathematik eingesetzt. Die außermathematische Situation wird hier mit einer Ellipse symbolisiert. Mit anderen Worten: Mathematik wird in die außermathematische Welt „eingekleidet". So können die Dinge aus der unmittelbaren Welt der Schüler wie z.B. Noten zur Einführung des mathematischen Begriffes Mittelwert benutzt werden. Das primäre Ziel dabei ist nicht, etwas über die Noten oder das Taschengeld zu lernen, sondern über den Mittelwert.

Einkleidungen, die auch als inverse Modellierungen bezeichnet werden können, werden in der Mathematikdidaktik häufig eher kritisch betrachtet. Dazu stellt Jahnke fest:

> *„‚Eingekleidete' Aufgaben haben im Zuge der Forderung und Diskussion eines anwendungsorientierten oder realitätsnahen Mathematikunterrichtes den Unmut der Neurer auf sich ge- und besondere Prügel bezogen. [...] Diese Kritik hatte und hat ihre Berechtigung, schießt aber über das Ziel hinaus, wenn sie eingekleideten Aufgaben grundsätzlich eine Bedeutung abspricht."* (Jahnke 2001, 5)

Der Hauptkritikpunkt an „Einkleidungen" ist also ihre vermeintliche Realitätsferne. Im Gegensatz dazu ist Modellierung eher positiv belegt und erfreut sich in den Formulierungen von Lernzielen zunehmender Beliebtheit (vgl. Baumert, Stanat, Demmrich 2001).

Den Sinn von „Einkleidungen" im Mathematikunterricht sieht Jahnke (2001, 5) vor allem darin, dass mathematische Sachverhalte durch Einbettung in nicht-mathematische Vorstellungen oder Grundvorstellungen der Schüler verständlicher und zugänglicher gemacht werden. Für Jahnke (2001, 6)

> *„sind eingekleidete Aufgaben doch eine Form der Veranschaulichung in einem gegenläufigen Sinne zu Anwendungen: wird dort Mathematik auf nicht-mathematische Sachverhalte angewandt, so werden hier Grundvorstellungen zu Gunsten der Mathematik mobilisiert."*

Im Einklang damit empfiehlt auch Heymann in einem verstehensorientierten Mathematikunterricht „Vorstellungsbilder und Metaphern des Alltagsdenkens für die Mathematik

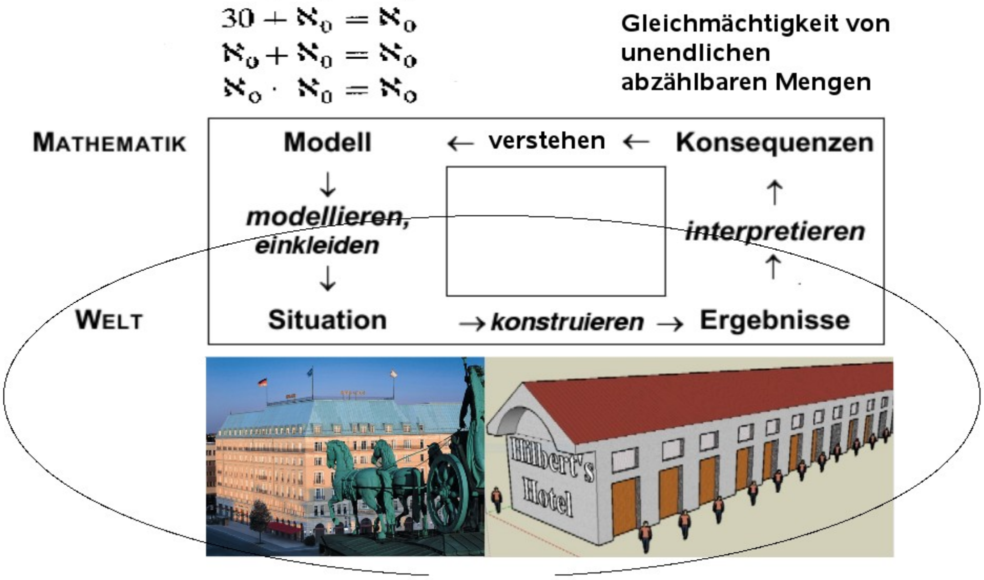


Abbildung 3.7: „Einkleidungskreislauf“

fruchtbar zu machen“ (Heymann 1996, 248). Einer der wenigen weiteren Autoren, die Einkleidungen im Mathematikunterricht für sinnvoll erachten, ist Zais. Er verwendet für Einkleidungen die Bezeichnung „umgekehrte Modellierung“[7] und illustriert sie am Beispiel der Addition von Brüchen, die von einer Mutter für ihr Kind durch Uhrzeiten modelliert wird, um einem Kind zu erklären, was $\frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$ in der Mathematik bedeutet (vgl. Zais 1995, 550ff.).

Bei Lambert (2006, 4) wird „Einkleidung“ als Übersetzung aus der Sprache der Mathematik in die Alltagssprache interpretiert. Dadurch wird die Umkehrbarkeit von Modellierungsprozessen als Übersetzungsprozessen angedeutet.

Das Modell von Schupp (1988) dient im Folgenden als Ausgangspunkt von Modifikationen zu einem sogenannten „Einkleidungskreislauf“ (siehe Abb. 3.7). Die entscheidende Modifikation besteht vor allem in der Richtungsänderung des Kreislaufs. So wird beispielsweise bei Hilbert das Konzept der Unendlichkeit auf Situationen mit Hotelzimmern und Bussen übertragen. Ausgehend davon wird eine „realitätsfremde“ Situation eines Hotels mit unendlich vielen Zimmern konstruiert. Diese nicht realistische, aber zunächst auch nicht mathematische Situation veranschaulicht Ergebnisse bzw. Erkenntnisse, die anschließend in die Mathematik zurückübersetzt werden.

„Einkleidungen“ können darüber hinaus verschiedene mathematische Inhalte miteinander vernetzen, indem sie als Anschauungsräume zwischen den verschiedenen Bereichen

[7] Es ist kaum auszuschließen, dass es im Mathematikunterricht zu „verkehrten Modellierungen“ kommen kann. Der Leser möge ahnen, was damit gemeint ist.

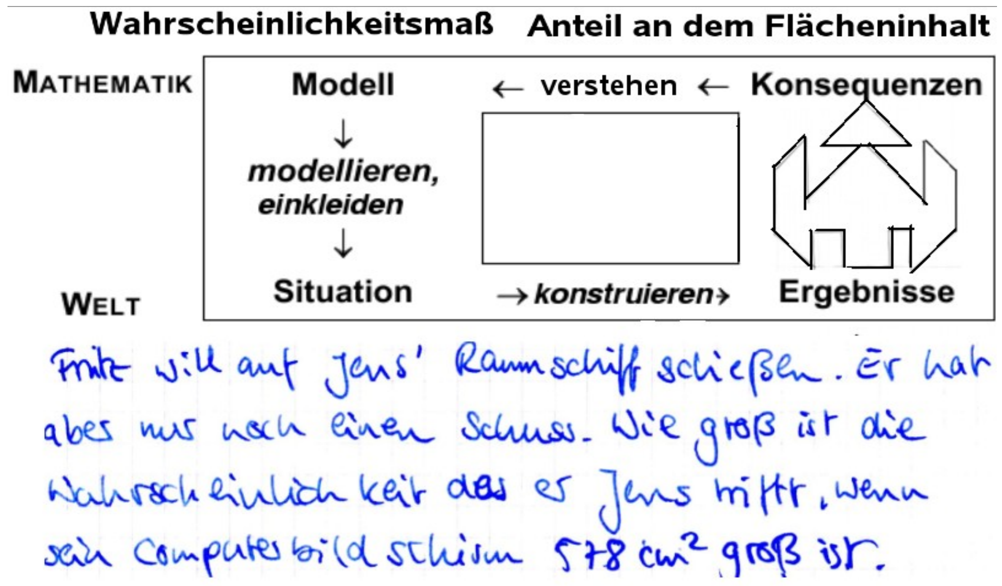


Abbildung 3.8: „Raumschiff“ als Einkleidung

(Geometrie, Arithmetik bzw. Algebra) auftreten.[8] Abbildung 3.8 zeigt am Beispiel der in 2.5 vorgestellte Schüleraufgabe „Raumschiff“ den modifizierten Modellierungs- bzw. Einkleidungskreislauf. Hier werden Wahrscheinlichkeitsmaße als Anteile an Flächeninhalten modelliert. Dafür werden die Flächeninhalte in die außermathematische Welt des Computerspiels eingekleidet, um zwischen den Konzepten des Wahrscheinlichkeitsmaßes und der Flächenanteile zu vermitteln. Der Einsatz von Geometrie zur Veranschaulichung wird hier durch Einkleidungen bzw. Teileinkleidungen in außermathematische Situationen unterstützt.

Einkleidungen im Mathematikunterricht genügen den drei von Stachowiak aufgestellten Merkmalen eines Modells (vgl. 3.2.1). Sie weisen Abbildungsmerkmale auf, weil sie bestimmte Aspekte eines mathematischen Phänomens wie beispielsweise der Addition von Brüchen auf Grundrisse von Zimmern abbilden. Gleichzeitig verkürzen sie dieses Phänomen, indem sie seine Abbildung auf eine bestimmte Situation begrenzen. In dem Beispiel aus der in 2.5 vorgestellten Erprobung entsteht die Begrenzung beispielsweise durch eine konkrete Grundrisszeichnung.

Der Begrenzung durch Einkleidungen schreibt Menck (1986, 112) eine wichtige Aufgabe im Mathematikunterricht zu. Durch die Einkleidung kann beispielsweise der

[8] Wenn „Modell“, „Situation“, „Ergebnisse“ und „Konsequenzen“ als Knoten eines Netzes interpretiert werden, kann der Modellierungsprozess als ein Netz im Sinne von Hischer interpretiert werden. Die Voraussetzung dafür ist, dass es möglich ist, zwei Knoten auf verschiedenen Wegen zu verbinden. Dafür kann es erforderlich sein, auch Umkehrungen in der Richtung des ganzen Prozesses sowie seiner Schritte zuzulassen.

Lösungsraum einer Aufgabe oder die ihr zugrunde liegende Zahlenmenge eingeengt werden. So kann beispielsweise eine Beschränkung auf den Bereich der natürlichen Zahlen in einer Aufgabe durch eine außermathematische Geschichte erfolgen: Statt Kuchen unter Gästen aufzuteilen, sollten Schüler auf Mannschaften aufgeteilt werden. Dadurch kann im Unterricht zunächst den Fragen der Bruchrechnung ausgewichen werden. Gleichzeitig eröffnet eine neue Einkleidung Perspektiven auf Fragen der Teilbarkeit. Somit können Einkleidungen nicht nur helfen, Grenzen zwischen verschiedenen Bereichen der Schulmathematik zu überbrücken, sie können diese Grenzen auch erzeugen. Dabei sollen sie aus der Perspektive des Aufgabenstellers einen bestimmten Zweck erfüllen. Dieser kann in der Vereinfachung, Ordnung, Orientierung, Veranschaulichung, aber auch Verschönerung eines Phänomens bestehen. Der vom Aufgabensteller beabsichtigte Zweck kann dem Aufgabenlöser auch verborgen bleiben. An dieser Stelle überschneiden sich die von Stachowiak aufgestellten Zweckmerkmale eines Modells und die Zweckaspekte eines Netzes von Hischer (vgl. 2.3.3). Insofern erlauben es Einkleidungen von mathematischen Phänomenen in außermathematische Situationen nicht nur vom Lehrer erwünschte, sondern auch unerwünschte Effekte eines „vernetzenden Unterrichts“ im Sinne von Hischer zu beschreiben.

3.3 Soziale Dimension des Vernetzens in der Mathematik

Einkleidungen, die in 1.2 und 2.5 vorgestellt wurden, wurden als Modellvernetzungen von Schülern in Kooperation innerhalb kleiner Gruppen erarbeitet und vorgestellt. Auf der anderen Seite wurde in dem vorhergehenden Abschnitt gezeigt, dass Einkleidungen als Modelle gedeutet werden können. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage: Inwiefern können Einkleidungen von Mathematik in außermathematische Situationen oder innermathematisches Modellieren als kooperative Prozesse verlaufen? Modellieren als kooperativer Prozess wird bei Ossimitz und Lapp (2006, 175ff.) als ein Aspekt „vernetzten Denkens“ beschrieben. „Vernetztes Denken“ wird bei Ossimitz und Lapp als Gegensatz zum linearen Denken in Ursache-Wirkungs-Ketten betrachtet und hängt demnach mit einem dynamischen Denken und einem Denken in Modellen zusammen. Insofern kann der von Ossimitz und Lapp (2006, 177) für das Modellbilden entwickelte Kreislauf (siehe Abb. 3.9), der eine Kooperation zwischen Anwendern und Modellspezialisten berücksichtigt, auf Einkleidungen und weitere Modellvernetzungen bezogen werden.[9] Nach der Auffassung von Ossimitz und Lapp (2006, 175ff.) entsteht ein Modell, das zum Lösen eines beispielsweise betriebswirtschaftlichen Problems angewandt werden soll, erst in der Kooperation von Experten aus den beiden Bereichen. Sowohl die Anpassung,

[9] Für Hischer (2010a, 199) ist *„vernetztes Denken“* ein Teil *„vernetzenden Denkens“*, das mit Hilfe der Netz-Definition beschrieben wird.

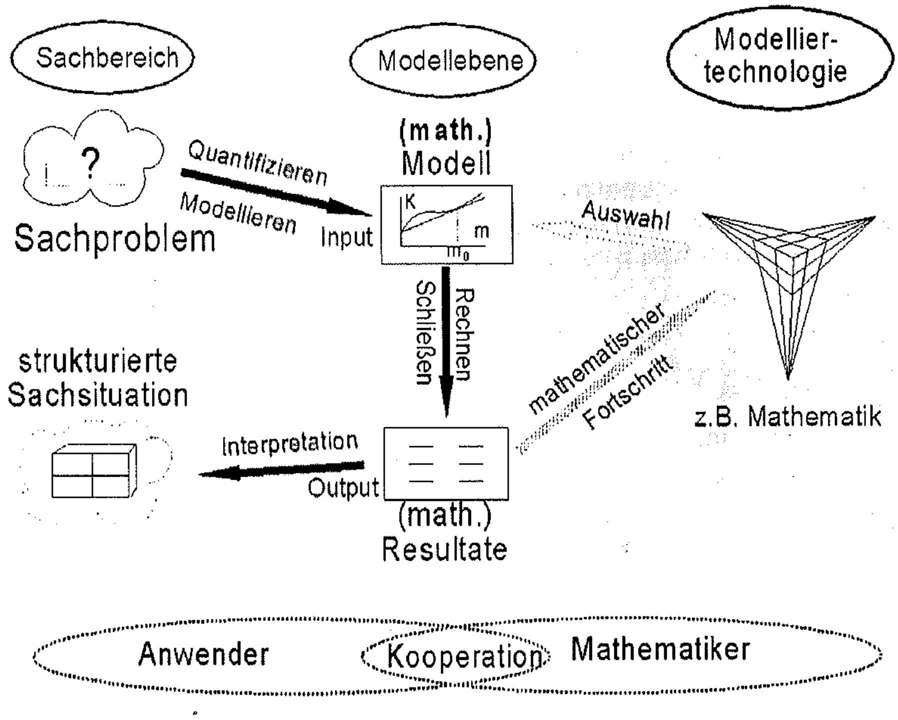


Abbildung 3.9: Modellierungskreislauf nach Ossimitz und Lapp

als auch die Auswahl mathematischer Werkzeuge für betriebswirtschaftliche Zwecke setzt nicht nur mathematische, sondern auch betriebswirtschaftliche Expertise voraus. Das Gleiche betrifft Anwendungen von Mathematik in Technik, Physik, Chemie und weiteren wissenschaftlichen und gesellschaftlichen Bereichen, aber auch innermathematische Anwendungen. Die Besonderheiten der Kooperation unter Mathematikern werden im vorliegenden Abschnitt betrachtet, um eine Erweiterung der aufgestellten Begrifflichkeiten durch die soziale Ebene der Vernetzung für den Mathematikunterricht vorzunehmen.

Die Betrachtung sozialer Aspekte von Vernetzungen im Mathematikunterricht ist ein weites Arbeitsfeld, auf dem noch viele Fragen offen sind (vgl. Hischer 2010a, 219ff.). Zwei Fragen dieser Art wurden in der Einleitung (1.4) formuliert und lauten:

- Wie kann die Lerngruppe als soziales Phänomen produktiv bei der Entstehung von kapitelübergreifenden Bezügen berücksichtigt werden?
- Welche Hinweise und Vermutungen über die Problematik der Beziehungshaltigkeit lassen sich durch Exkurse in die Philosophie und die Soziologie der Mathematik finden?

Eine Beschäftigung mit diesen Fragen geht über die Grenzen der Mathematikdidaktik hinaus und kann im Einklang mit der Feststellung von Ossimitz und Lapp (3.2.4) nur in Kooperation von Experten aus verschiedenen Wissenschaftszweigen erfolgen. Insofern sind die folgenden Ausführungen nicht als didaktische Postulate, sondern als Anregungen zum gemeinsamen Nachdenken, Diskutieren und Hinterfragen auf der theoretischen Ebene und als eine Ideenquelle für Praxisvorschläge zu verstehen.[10]

3.3.1 Wissenschaft als didaktisches Argument

Die Auffassungen von dem Wesen der Mathematik als einer wissenschaftlichen Disziplin sind Gegenstand der Philosophie der Mathematik, die nach Steiner (1989) bei einer entsprechenden Betrachtungsweise auch Wissenssoziologie umfassen kann. Steiner konstatiert eine wechselseitige Beziehung zwischen Mathematikauffassungen, Philosophien und Epistemologien der Mathematik sowie mathematikdidaktischen Theorieansätzen. Demnach beinhaltet jede Philosophie der Mathematik implizit oder explizit bestimmte unterrichtliche Orientierungen. Konzepte des Mathematiklernens beziehen sich wiederum auf einzelne Aspekte der Philosophie der Mathematik (vgl. Steiner 1989, 48ff.). So argumentiert beispielsweise schon Klein mit mathematischen Arbeitsweisen von Wissenschaftlern, wenn er seine Vorschläge zur Fusion von geometrischen und algebraischen Gebieten der Schulmathematik formuliert (vgl. 2.2.1). Auch Freudenthal, Winter, Wittmann, Vollrath, Kießwetter, Brinkmann, Hischer und Schupp beziehen sich in ihren Arbeiten auf mathematische Forschung und leiten davon didaktische Argumente ab (vgl. 2.2, 2.3). Freudenthal möchte in dem Schüler einen Wissenschaftler sehen, der mathematische Gesetzmäßigkeiten nachentdeckt:

> *„… im Hineinwachsen schafft sie [die Jugend] mit an den neuen Formen, und zu den neuen Formen gehört auch ein neuer Begriff der Wissenschaft. [...] Man lernt nicht Wissenschaft, sondern man erschafft sie, wiedererschaffend oder neuschaffend.“ (Freudenthal 1963, 11)*

Vollrath (vgl. 2.2.6) sieht ebenso Parallelen zwischen der Mathematik als Wissenschaft, die er mit Hilfe der Metapher des Netzes beschreibt, und dem Lernen von Mathematik:

> *„Beim Entstehen von Mathematik bildet sich zunächst ein Netz von Erkenntnissen aus, die erst in einer fortgeschrittenen Phase systematisch geordnet werden. Entsprechendes gilt auch für die Lernenden.“* (Vollrath 2001, 64)

Andererseits gibt es nach Steiner keine ausgezeichnete, konstante, universelle Philosophie der Mathematik. Deshalb versucht er unter dem Aspekt der Fruchtbarkeit für das Lehren und Lernen von Mathematik Kriterien für philosophische Ansätze aufzustellen. Diese lassen sich in der folgenden These zusammenfassen:

[10] Argumente der Wissenschaftlichkeit geben auch Schultheoretikern wie beispielsweise Diederich und Tenorth (1997, 91) Ansatzpunkte zur Diskussion über allgemeinbildenden Unterricht. Sie unterstreichen, dass wissenschaftliche Disziplinen zwar Ausgangspunkte, aber nicht Ziele eines allgemeinbildenden Unterrichts sein können und zur Erklärung der Struktur schulischen Wissens allein noch nicht ausreichen.

> *„Für die Mathematikdidaktik sind Philosophien der Mathematik zu bevorzugen bzw. auszubauen, in denen u.a. die unterschiedlichen Wissensformen, subjektive und objektive Entwicklungsdynamiken, Beziehungshaltigkeit und Anwendungsbezug, die personale und soziale Dimension und Bedingtheit von Mathematik angemessen zur Geltung kommen.“* (Steiner 1989, 56)

Hier werden Beziehungshaltigkeit, die in 2.2 ausführlich aus mathematikdidaktischer Sicht dargestellt wurde, und die soziale Dimension der Mathematik neben weiteren Auswahlkriterien für Philosophien der Mathematik aufgezählt. Da die Konzepte von Beziehungshaltigkeit und Vernetzung in der Mathematikdidaktik historisch aufeinander aufbauen, wird im nächsten Abschnitt zunächst auf einen Vorschlag von Fischer zur Vernetzung als wissenschaftlicher Arbeitsweise eingegangen. Dabei wird wissenschaftliche Argumentation als Vernetzung und Reflexion verstanden (vgl. Fischer 1993a, 33). Daraufhin wird ein um die soziale Dimension ergänzter Begriff der Wissenschaftsdisziplin vorgestellt. Das Ziel dieser Ausführungen besteht darin, eine Grundlage für die darauf folgende Diskussion von sozialen Aspekten des Vernetzens im Mathematikunterricht zu legen.

Wissenschaftliche Argumentation als Vernetzung und Reflexion

In 2.1.2 wurde erwähnt, dass Popper Wissenschaft metaphorisch als Netz von Theorien beschreibt. Demnach ist wissenschaftliche Arbeit mit dem Knüpfen von Maschen vergleichbar. Für Fischer besteht die allgemeinste Form einer wissenschaftlichen Begründung für etwas darin, „einen Zusammenhang mit etwas anderem herzustellen, etwas, das in der zu begründenden Aussage nicht direkt angesprochen ist“ (vgl. Fischer 1993a, 33). Dies kann eine Literaturquelle, eine Beobachtung, das Resultat eines Versuchs, eine allgemeine These oder ein Axiom sein, aber auch eine analoge Situation. Dieses Verständnis von Argumentation ist weiter als „logisches Schließen“ oder „Verbindung mit Empirie“ gefasst. Grenzfälle für wissenschaftliche Argumentation sind laut Fischer dann gegeben, wenn nicht sichtbar ist, worin der Zusammenhang besteht. Deshalb geht es darum, beispielsweise durch Bezug auf etwas Drittes zu explizieren, warum etwas ein Argument sein soll. In diesem Sinne kann keine Gewissheit darüber bestehen, ob eine Vernetzung vollständig ist und alle wichtigen Zusammenhänge hergestellt worden sind. Deshalb ist für eine Argumentation über Vernetzung hinaus Reflexion notwendig. Dazu zählt das Hinterfragen von bereits hergestellten Beziehungen. Auch die Frage, welche Verbindungen noch nicht berücksichtigt worden sind, ist hierfür relevant (Fischer 1993a, 33ff.).

Das allen wissenschaftlichen Disziplinen Gemeinsame ist Fischer zufolge die Vernetzung, die für ihn synonym als Verbindung bezeichnet werden kann. Im Einklang damit besteht die Funktion der Wissenschaft gegenüber der Gesellschaft darin, Verbindungen herzustellen und Verbindlichkeit zu schaffen. Andererseits hat die Wissenschaft nach Fischer auch die Aufgabe, durch Reflexion Verbindungen und Verbindlichkeiten in Frage zu stellen. Diese steht im Gegensatz zur Aufgabe der Wissenschaft für die Gesellschaft, durch Verbindlichkeit Sicherheit zu geben (vgl. Fischer 1993d, 62f.). Demzufolge kann Reflexion zu Verunsicherungen führen, die bei Fischer wiederum mit Befreiung assoziiert werden:

> *„Man ist nicht eingefangen im Netz des Wissens, es gibt eine Möglichkeit, dem zu entkommen.“* (Fischer 1993d, 63)

Welche Hinweise gibt Fischers Auffassung von Vernetzung in der Wissenschaft auf das Vernetzen in der Mathematik und im Mathematikunterricht?

- Wie Brinkmann verwendet Fischer die Begriffe *Verbindung* und *Vernetzung* synonym und unterscheidet zwischen verschiedenen Arten der Vernetzung. Dies ermöglicht im Falle von Fischer einen Anschluss an die transdisziplinäre Kooperation von Wissenschaftlern und im Falle von Brinkmann an verschiedene voneinander abweichende Auffassungen von Vernetzungen in der Mathematikdidaktik. Die Anschlussfähigkeit des Begriffs kann wiederum mit einer tiefergehenden Präzision einhergehen, was in 2.2.1 im Zusammenhang mit Metaphern als wissenschaftlichen Werkzeugen bereits erwähnt wurde (vgl. Fischer und Malle 1985, 163).

- Fischers Verständnis von Vernetzungen als einem Aspekt wissenschaftlicher Argumentation umfasst einerseits deduktives Schließen als innermathematische Argumentation, wertet aber auch Analogieschlüsse als Begründungsmöglichkeiten auf. Dies kann als Argument für inner- und außermathematische Analogien im Mathematikunterricht (einschließlich Einkleidungen) sprechen (vgl. 3.2).

- Die Idee von der Sicherheit, die Vernetzungen oder Netze des Wissens im gesellschaftlichen Kontext geben können, entspricht einem der Zweckaspekte von „Netz“ im pädagogisch-didaktischen Kontext bei Hischer. Denn durch Sammeln und Zusammenhalten, aber auch Trennen wird den Benutzern des Netzes Sicherheit und Schutz gewährt (vgl. Hischer 2010a, 67). So können mathematische Vernetzungen den Schülern mehr Sicherheiten im Umgang mit ihrer Zukunft in der Gesellschaft geben.

- Im Kontext der gesellschaftlichen Relevanz von wissenschaftlichen Vernetzungen nach Fischer sind nicht nur innermathematische Vernetzungen, sondern auch ihre Reflexion im Mathematikunterricht relevant. Erst durch Reflexion von innermathematisch hergestellten Verbindlichkeiten kann im Mathematikunterricht nicht nur Sicherheit, sondern auch Verunsicherung erzeugt werden. Das Letztere ist im

Zusammenhang mit Tenorths Gedanken von Bildung im Umgang mit Unsicherheiten relevant und steht im Einklang mit Führers Konturen eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts (vgl. 2.1).

- Vernetzung durch Anknüpfen an Forschungsergebnisse anderer Wissenschaftler im Sinne von Fischer bezieht die soziale Komponente des wissenschaftlichen Denkens ein.

Diese Betrachtungen führen zu einem erweiterten Begriff einer Wissenschaftsdisziplin im Allgemeinen und der Mathematik im Besonderen.

Erweiterung des Wissenschaftsbegriffs

Angesichts der fehlenden Explikation und Bestimmtheit eines allgemeinen wissenschaftlichen Disziplinbegriffs werden hier erkenntnistheoretische und soziologische Perspektiven in Anlehnung an Tenorth (2010, 13) zu einem begrifflichen Hintergrund kombiniert (siehe Stichweh 1984, Flach 1994). Demzufolge wird Mathematik als Wissenschaftsdisziplin sowohl in einem epistemologischen wie auch in einem soziologischen Sinne verstanden. Epistemologisch kann man von Disziplinen sprechen, wenn wissenschaftliche Produkte unter erkenntnistheoretischem Anspruch betrachtet werden sollen. Im Einklang mit Fischer (1993a, 29) werden hier Theorien, Methoden, Themen oder Fragestellungen als wissenschaftliche Produkte verstanden. Diese sind meist durch wissenschaftliche Texte in Büchern und Zeitschriften repräsentiert. Ein beträchtlicher Teil wissenschaftlicher Forschungsprozesse besteht jedoch aus Vorträgen, Diskussionen oder gar informellen Gesprächen, die einerseits in die verfassten Publikationen einfließen, andererseits sich davon unterscheiden (vgl. Heintz 2000, 162ff.).

Soziologisch bezeichnet Disziplin eine Gemeinschaft von Individuen, die als „Wissenschaftler“ auftreten, die bestimmte einheitliche Annahmen über Alternativen, Fragestellungen, Themen, Methoden, Praktiken, Datenmaterial und Gütekriterien einer „wissenschaftlichen“ Arbeit teilen. Sie können sich über diese Gemeinsamkeiten von anderen Bereichen der Wissenschaft abgrenzen. Dadurch können sie sich dauerhaft in einem modernen Wissenschaftssystem etablieren. Unterscheidet sich eine wissenschaftliche Disziplin durch ein Zusammenspiel von epistemischen und sozialen Komponenten von anderen wissenschaftlichen Gemeinschaften, dann kann man von der Identität der jeweiligen Disziplin sprechen (vgl. Tenorth 2010, Stichweh 1984, Flach 1994).

Als Erkenntnistheoretiker stellt Flach die Methode[11] an den Anfang seines Wissenschaftsverständnisses. Demnach grenzen sich die Wissenschaften durch ihre Methoden von anderen Bereichen der geistigen Tätigkeit ab. Somit sieht Flach vor allem in den Methoden den Grund für eine Ausdifferenzierung der Wissenschaften. Andererseits führen spezielle Methoden und ihre Anordnung zu einer Binnendifferenzierung der Wissenschaften in wissenschaftliche Disziplinen. Eine Gesamtheit aus bestimmten universellen und speziellen Zugänge macht die Wissenschaften im Ganzen, aber auch die wissenschaftlichen Disziplinen aus. So zeichnen Konstellationen aus bestimmten universellen und speziellen Arbeitsweisen bestimmte Wissenschaftsdisziplinen gegenüber anderen aus. Die Überlappung von speziellen und universellen Methoden halten die Wissenschaften zusammen (vgl. Flach 1994, 437ff.).

3.3.2 Mathematik als Wissenschaftsdisziplin

Im Folgenden werden verschiedene Perspektiven auf Besonderheiten der Mathematik als einer wissenschaftlichen Disziplin vorgestellt. Darunter sind die systemtheoretische Perspektive von Maaß, Perspektiven des Philosophen Kleinert und der Soziologin Heintz, ergänzt durch mathematikdidaktische Perspektiven von Wille sowie schließlich Perspektiven von Mathematikern anhand ausgewählter Beispiele.

Mathematik als soziales System

Maaß (1988) versucht eine Antwort auf die Frage nach Unterscheidungsmerkmalen der Mathematik zu geben. Er betrachtet Mathematik als soziales System im Sinne von Luhmanns Systemtheorie und wählt dabei eine geschichtliche Perspektive. Demnach unterscheidet sich die Mathematik von anderen wissenschaftlichen Disziplinen vor allem durch die formal-axiomatische Methode als einem spezifischen Wahrheitskriterium. Denn im Gegensatz zu den empirischen Wissenschaften gibt es Maaß zufolge für deduktiv-axiomatische Theorien keinen Bewährungszwang in der Wirklichkeit außerhalb der Mathematik (vgl. Maaß 1988, 89).

Die Durchsetzung der formal-axiomatischen Methode beobachtet Maaß u.a. anhand von historischen Veränderungen des wissenschaftlichen Personals an den Universitäten, institutionellen Entwicklungen, der Entstehung von Vereinigungen sowie anhand von

[11] Feyerabend (1980, 97) argumentiert zwar gegen Methodenzwang, jedoch nicht gegen die Anwendung von Methoden in der Wissenschaft: „*Anything goes* ist nicht das eine und einzige *Prinzip* einer neuen von mir empfohlenen Methodologie. Ich empfehle keine neue *Methodologie*, ganz im Gegenteil, ich betone, daß die Erfindung, Überprüfung, Anwendung methodologischer Regeln und Maßstäbe die Sache der konkreten wissenschaftlichen Forschung und nicht des philosophischen Träumens ist.“ Er argumentiert für einen Methodenpluralismus. Wenn die Wissenschaftler den Eindruck haben, mit den existierenden Maßstäben kein Erkenntnisgewinn zu erzielen, sollen sie frei sein, diese Maßstäbe zu modifizieren, zu vervollständigen oder gar zu verwerfen.

Kongressen und mathematischen Zeitschriften. Ausgehend davon kann seit dem Ersten Weltkrieg eine steigende Anzahl von wissenschaftlichen Zeitschriften und eine Tendenz zu ihrer Spezialisierung konstatiert werden (vgl. Maaß 1988, 80). Das Letztere hängt möglicherweise mit dem „pragmatischen Formalismus“ zusammen. Dieser ist weniger streng als der Formalismus der Gruppe Bourbaki, weil er nicht mehr eine Axiomatisierung der gesamten Mathematik anstrebt, sondern nur noch eine formal-axiomatische Darstellung der eigenen Forschungsresultate (vgl.Maaß 1988, 66).[12] Die Befunde von Maaß stehen im Einklang mit Behauptungen von Flach, für den die wissenschaftliche Methode ausschlaggebend für die Aus- und Binnendifferenzierung einer wissenschaftlichen Disziplin ist.

Konstruktiv-deduktive Potenziale der Mathematik

Die Besonderheiten von mathematischen Methoden unterstreicht gleichermaßen Kleinert. Als Mathematikphilosoph konstatiert er ebenfalls, dass in der Mathematik nicht zwingend mit Bezug auf Empirie im Sinne physischer Wirklichkeit argumentiert werden muss[13]:

> *„Alle Mathematik lässt ihren äußeren Anstoß schnell hinter sich; keine Erfahrung, kein Anwendungsbedürfnis suggeriert dann die richtigen Fragen; nur durch eigenes Operieren, eigenen Umgang mit den mathematischen Gegenständen kommt er (der Geist) ihnen näher und kann ihre Gesetze ergründen.“* (Kleinert 2005, 48)

An einer anderen Stelle vergleicht Kleinert Mathematik mit anderen wissenschaftlichen Disziplinen und führt ihr konstruktives Potenzial ebenfalls wie Maaß auf die axiomatische Methode zurück:

> *„Die Mathematik zieht sich gewissermaßen am eigenen Zopf empor, ein Privileg, das sie anderen Wissenschaften voraus hat und wiederum der axiomatischen Methode verdankt.“* (Kleinert 2005, 58)

Mathematische Erfahrungen bestehen für Kleinert aus dem Klassifizieren und in-Beziehung-setzen von mathematischen Begriffen:

> *„Ist nun das Begriffsnetz genügend dicht und die Kenntnis von Beispielen genügend entwickelt, kann man daran gehen, Teilbereiche zu klassifizieren [...] von einem philosophischen Blickpunkt aus [...] ist doch, einer alten Einsicht zufolge, alles Erkennen ein Beziehen. Mitunter grenzt es doch ans Magische, wie die Kenntnis von Beziehungen zwischen Objekten, die man einzeln für sich genommen, nicht besonderes gut kennt, unser Wissen von ihnen vermehren kann.“* (Kleinert 2005, 50)

[12] Hierin lässt sich eine Parallele zum „lokalen Ordnen“ Freudenthals (2.2.5) erkennen.

[13] Im Hinblick auf außermathematische Anwendungen sprechen Gellert und Jablonka von der hypothetischen Kraft der mathematischen Argumentation: „Mathematical thinking has the power of hypothetical reasoning: It is possible to calculate some consequences of different scenarios before the corresponding actions are carried out.“ (Gellert und Jablonka 2009, 20)

Bemerkenswert ist, dass Kleinert aus der erkenntnistheoretischen Perspektive zu ähnlichen Schlüssen kommt wie Maaß, der einen geschichtlichen und systemtheoretischen Zugang wählt. Die Auffassungen beider Wissenschaftler lassen vermuten, dass die innere Kohärenz der Mathematik sich ihrem Wesen nach von anderen wissenschaftlichen Disziplinen und insbesondere von Naturwissenschaften unterscheidet und sowohl die Erkenntnisprozesse wie die Kommunikation unter den Mathematikern stark beeinflusst. Wenngleich Vernetzungen nach Fischer (vgl. 3.3.1) auch in anderen wissenschaftlichen Disziplinen einen wichtigen Teil der Argumentation ausmachen, gelten in der Mathematik besondere Regeln, nach denen vernetzt werden darf.

Kohärenz **und** ***Konsens*** **in der Mathematik**

Die Soziologin Heintz (2000) erkennt ebenfalls die Universalität der Mathematik an, sucht jedoch nach einer soziologischen Erklärung dafür. In der begrifflichen Kohärenz und dem hohen Konsens auf der sozialen Ebene sieht sie *epistemische Besonderheiten* der Mathematik:

> *„Im Gegensatz zu den anderen Disziplinen, die in verschiedene und teilweise widersprüchliche Theorien zerfallen, bildet das Gebäude der Mathematik nach wie vor ein zusammenhängendes Ganzes. Angesichts der enormen Spezialisierung [...] ist diese Kohärenz keineswegs selbstverständlich. Die Mathematik ist ein kollektives Produkt, aber kein zentral koordiniertes. Es gibt keine Instanz, die dafür sorgen würde, dass die einzelnen Ergebnisse zueinander passen. Doch obschon die Mathematiker relativ vereinzelt arbeiten und sich ihr Arbeitsfeld in der Regel auf ein winziges Territorium beschränkt, werden immer wieder Verbindungen zwischen den Gebieten entdeckt, die unabhängig voneinander entwickelt wurden.“* (Heintz 2000, 19)

Der hohe soziale Konsens zählt für Heintz zu den auszeichnenden Merkmalen der Mathematik gegenüber anderen wissenschaftlichen Disziplinen:

> *„Im Gegensatz zu anderen Wissenschaften scheint es in der Mathematik keine interpretative Flexibilität zu geben. Die Schlussfolgerungen der Mathematik sind zwingend. Wer sich an die Regeln der mathematischen Methode hält, wird unweigerlich zum selben Resultat gelangen.“* (Heintz 2000, 20)

Die Regeln des Schlussfolgerns oder des mathematischen Beweisen betrachtet Heintz nicht nur als Methode, um wissenschaftliche Ergebnisse zu erzielen, die in allen Bereichen der Mathematik angewandt werden, sondern auch als ein Kommunikationsmittel unter den Wissenschaftlern. Insofern trägt das mathematische Beweisen als eine besondere Methode zum Zusammenhalt der Mathematik auf der sozialen Ebene bei. Dies äußert sich in der informellen, direkten Kommunikation anders als in publizierten Forschungsresultaten. Direkte Kommunikation findet beispielsweise in Vorträgen, Diskussionen danach und informellen Gesprächen statt, während Publikationen erst am Ende des Forschungsprozesse dessen Ergebnisse eher linear darstellen:

> *„In den offiziellen Publikationen ist eine experimentelle und induktive Seite der Mathematik nicht mehr sichtbar.[...] Sehr viel ausgeprägter noch als in den Naturwissenschaften wird der oftmals unberechenbar verlaufende Entwicklungsprozess im nachhinein linearisiert und in einen logisch zwingenden Ablauf gebracht. Dies fängt beim Aufbau einer Arbeit an und gilt natürlich erst recht für den Beweis.“* (Heintz 2000, 20)

Durch nachträgliche Linearisierung der Forschungsresultate wird der Forschungsprozess nicht in seiner vollen Komplexität dargestellt, was Anschlussfähigkeit und Kommunizierbarkeit der Ergebnisse verbessern kann. Wenngleich streng festgelegte formale Symbolik und Linearität bei der Präzisierung und Mitteilung von Forschungsresultaten wichtig ist, kann sie in der Phase der Ideenentwicklung in der direkten mündlichen Kommunikation einengend sein. An dieser Stelle werden häufig bildliche Darstellungen auf einem Blatt Papier oder an der Tafel herangezogen (vgl. Heintz 2000, 167f.).

Bildliche Darstellungen können Heintz zufolge als sogenannte „Ikonen“[14] gedeutet werden. Während Symbole als Bezeichnungen auf Konnotationen beruhen und keinen direkten inhaltlichen Zusammenhang mit dem bezeichneten Gegenstand aufweisen, weisen „Ikonen“ Ähnlichkeiten zu dem bezeichneten Gegenstand auf. „Ikonen“ bilden die zu bezeichnenden Gegenstände in gewissem Maße ab. So steht beispielsweise ein gezeichnetes Dreieck als ein Zeichen für Dreiecke (vgl. Heintz 2000, 163ff.). Der Übergang zwischen algebraischen Zeichen als Symbolen und geometrischen Zeichnungen als Ikonen ist in der Praxis der mathematischen Forschung anscheinend ein fließender. So schreibt beispielsweise Hilbert:

> *„Die arithmetischen Zeichen sind geschriebene Figuren, und die geometrischen Zeichen sind gezeichneten Formeln, und kein Mathematiker könnte diese gezeichnete Formeln entbehren.“* (Hilbert 1900, 295).

Trotz der fließenden Übergänge zwischen den Symbolen und „Ikonen“, die einfach als Bilder bezeichnet werden können, oder dem Schreiben und Zeichnen in der Mathematik gibt die Unterscheidung einige Hinweise auf das Potenzial von bildlichen Darstellungen in der Entwicklung mathematischer Forschung und der Kommunikation im Mathematikunterricht. Konkretere Hinweise darüber im Hinblick auf die Mathematikdidaktik geben Überlegungen von Wille (2005) und Kvasz (2008). Auf das Letztere wird in 3.4 gesondert eingegangen.

Wille (2005) konstatiert ebenfalls das Streben der Mathematiker nach einem hohen Konsens und hoher Kohärenz. Dieses Bestreben hängt für Wille mit einer restriktiven und konventionalisierten Fachsprache, die in Fachpublikationen benutzt wird, zusammen. Diese Sprache wird auch seiner Meinung nach weitgehend durch lineare Zeichenabfolgen

[14] Die von Heintz verwendete Bezeichnung erscheint im mathematik-didaktischen Kontext als ungewöhnlich, erleichtert jedoch die Integration der vorgestellten Ideen mit den Vorschlägen von Kvasz, die in 3.4 thematisiert werden.

dargestellt (vgl. Wille 2005, 6). Dies könnte ein Hinweis dafür sein, dass die Schwierigkeiten eines vernetzenden Mathematikunterrichts, auf die Kießwetter und Hischer (vgl. 2.3) hinweisen, nicht erst in der Schule entstehen, sondern im Wesen der mathematischen Fachsprache liegen (vgl. Maier und Schweiger 1999, 108ff.).

Anders verhält es sich nach Wille teilweise in der Lehre und in der Fachkommunikation von Mathematikern. Denn direkt zusammenarbeitende Mathematiker präsentieren laut Wille ihre Ergebnisse in einem erheblichen Ausmaß in Zeichnungen. Derartige Visualisierungen folgen demnach selten vorgegebenen Konventionen und ergeben sich meist aus dem Bedürfnis, ganzheitliche „Denkfiguren anschaulich und damit expliziter zu machen“ (vgl. Wille 2005, 8). Veranschaulichung soll somit einerseits eine ganzheitliche Sicht auf die Problematik gewähren, andererseits Kommunikation unterstützen.[15]

Ähnlich wie oben beschrieben wurde die Beziehungshaltigkeit der Mathematik bereits bei Lietzmann mit Hilfe von sich teils ergänzenden, teils sich widersprechenden methaphorischen Konzepten beschrieben. Das sind die Metapher einer Kette, die Lietzmann im Zusammenhang mit der Linearität und deduktiven Beweisen des pythagoreischen Satzes verwendet, und die Metapher des Netzes, mit der Lietzmann die Anschaulichkeit der Zerlegungsbeweise zum Ausdruck bringen will. Die Ausführungen des vorliegenden Kapitels unterstützen die bei Lietzmann angedeuteten Wesensmerkmale der Mathematik und erweitern sie um ihre sozialen Aspekte. Demnach können von Lietzmann ausgearbeitete inhaltliche Beispiele als Quelle für die Entwicklung von Aufgabenstellungen für kooperative Lernformen verwendet werden (siehe hierzu Kapitel 4).

Kooperation aus der Sicht von Mathematikern

Von der Wertschätzung der gegenseitigen Unterstützung und Zusammenarbeit unter Mathematikern zeugt zum Teil als Spaß zu verstehende Idee der *Erdős-Zahl*. Die Inspiration dafür geht auf die Produktivität des ungarischen Mathematikers Paul Erdős zurück. Erdős schrieb über 1400 Artikel mit über 500 Koautoren. (vgl. Hischer 2010a, 138). Um die dahinter stehende Idee zu illustrieren, ist in der Abbildung 3.10 der *Erdős-Graph* dargestellt. Als ein Knoten im Netz befindet sich Paul Erdős in der Mitte des Graphen. Über gemeinsame Publikationen mit weiteren Mathematikern, die ebenfalls als mit Namen beschriftete Knoten dargestellt werden, entstehen Verbindungen zwischen diesen Knoten. Diese Verbindungen werden als Kanten des Graphen modelliert.

Auf der Grundlage graphentheoretischer Modelle und von Informationen aus der Datenbank der *Mathematical Reviews* der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft wurde im Rahmen des Projekts „The Erdős Number Project” 2009 ein Programm zur

[15] Dass hier Explikation und Kommunikation sich nicht im Sinne von Fischer und Malle widersprechen, kann daran liegen, dass in der Mathematik der Geltungsbereich der getroffenen Aussagen immer begrenzt werden kann. Derartige Begrenzungen können durch Visualisierungen geschehen.

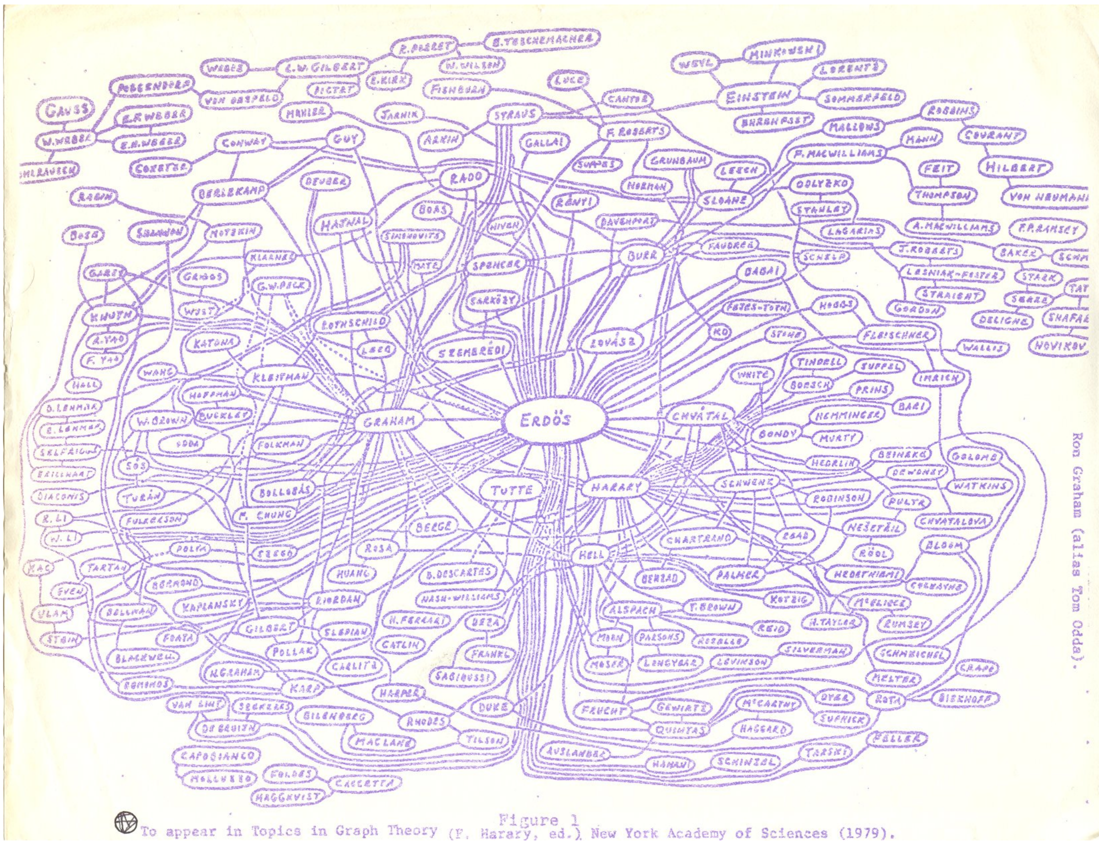


Abbildung 3.10: Mathematiker-Graph

Berechnung des *Erdős-Zahl* entwickelt. Demnach hat beispielsweise Wiles die *Erdős-Zahl 3*. Darüber hinaus hilft das Programm, den Abstand zwischen zwei verschiedenen Mathematikern basierend auf ihren Koautorschaften zu bestimmen (vgl. Hischer 2010a, 140ff.). Allerdings liefern *Erdős-Graph* und *Erdős-Zahl* keine Informationen über die Inhalte oder Themen der Kommunikation. Informationen dieser Art können beispielsweise dem *Zentralblatt MATH (Z-MATH)*[16] entnommen werden. Diese elektronische Datenbank enthält ca. 2,9 Millionen Einträge.

Zum Kategorisieren von Publikationen wird in Z-MATH die *Mathematics Subject Classification (MSC)* verwendet. Die MSC ist ein hierarchisch aufgebautes dreistufiges Schema. Die erste Stufe besteht aus 64 mathematischen Disziplinen. Beispiele dafür sind *Zahlentheorie* (11-XX), *Algebraische Geometrie* (14-XX), *Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse* (60-XX). Als ein Baum im graphentheoretischen Sinne ist MSC nach der Auffassung von Hischer (vgl. 2.3.3) zwar verbunden, aber noch nicht vernetzt. Netzwerkeigenschaften des Z-MATH kommen durch die einzelnen Artikel und

[16] FIZ/Karlsruhe/www.zentralblatt-math.org/zmath/en/[3.12.2012]

Zbl 0823.11030
Taylor, Richard; Wiles, Andrew
Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. (English)
Ann. Math. (2) 141, No. 3, 553-572 (1995). ISSN 0003-486X
Classification:
11G05 Elliptic curves over global fields
11F11 Modular forms, one variable
11D41 Higher degree Diophantine equations
13C40 Linkage, complete intersections and determinantal ideals
14M10 Complete intersections
14H52 Elliptic curves

Abbildung 3.11: Beispiel aus Z-MATH

Monographien zustande. Jeder Artikel und jede Monographie wird einer oder mehreren Disziplinen zugeordnet und verbindet diese somit. Nach diesem Verständnis können mathematische Publikationen als Repräsentationen von mathematischen Netzwerken sowohl auf epistemischer Ebene wie auch auf der sozialen Ebene gesehen werden.[17] Darüber hinaus bietet Z-MATH Möglichkeiten, die Entwicklung von wissenschaftlichen Netzwerken zu beobachten. Wie dies geschehen kann, soll an dem Beispiel in der Abbildung 3.11 vorgestellt werden. Es handelt sich um einen Eintrag aus Z-MATH, welcher einen Artikel von 1995 zeigt, der sowohl Mathematiker wie auch mathematische Disziplinen miteinander verbindet. Der Artikel beinhaltet letzte Schritte des Beweises der *Fermatschen Vermutung* und markiert das Ende einer langen mathematischen Abenteuerreise, die im 17. Jahrhundert anfing. In der Vermutung wird behauptet, dass es keine natürlichen Zahlen a, b und c gibt, die die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ für $n > 2$ erfüllen. Die Vermutung taucht 1621 auf.[18] Der Beweis der *Fermatschen Vermutung* verbindet drei verschiedene Bereiche der Mathematik. Dazu zählen *diophantische Gleichungen*, *modulare Formen* und *elliptische Kurven*. Darüber hinaus verbindet der Beweis verschiedene Mathematiker über Zeit und Raum hinweg. Um dies zu illustrieren, wurden einige wichtige Schritte des Beweises in einem Diagramm (siehe Abb. 3.12) festgehalten.[19] Als ein Schritt des Beweises der Fermatschen Vermutung untersuchte Frey 1984, was passieren würde, wenn die *Fermatsche Vermutung* falsch wäre und die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ für $n > 2$ mindestens eine Lösung hätte. Davon ausgehend fand er eine entsprechende elliptische Kurve. Auf dieser Grundlage konnte eine Verbindung zur *Shimura-Taniyama-Vermutung* hergestellt werden. Diese wurde 1955 in Japan aufgestellt und sollte eine

[17] Dabei ist zu beachten, dass es sich vor allem um schriftliche Produkte handelt. Der Zugang zu mündlicher Kommunikation ist beispielsweise durch Interviews wie bei Heintz (2000) denkbar.

[18] Die Vermutung enthaltende Dokumente wurden 1932 neu herausgegeben und sind ebenfalls in Z-MATH aufgelistet. Da ältere Dokumente in Z-MATH nicht nach MSC klassifiziert werden, ist es zu dem Zeitpunkt noch nicht möglich, eine Aussage darüber zu treffen, welche Disziplinen damit verbunden werden. Es lässt sich jedoch feststellen, dass Fermat durch Ergebnisse Diophants inspiriert wird.

[19] Die Grundlagen dieses Diagramms bilden der Modellierungskreislauf von Schupp (vgl. 3.2) und die Abbildungen von Kramer (1995).

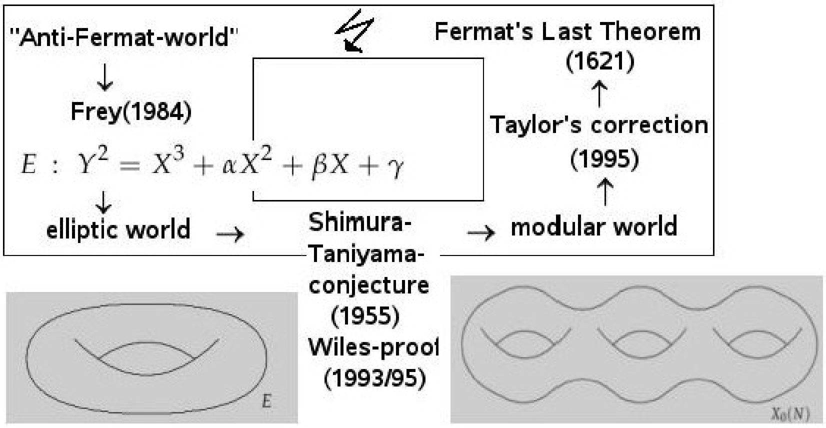


Abbildung 3.12: Fermatsche Vermutung und ihr Beweis

Brücke zwischen elliptischen und modularen Welten herstellen. Es gelang Wiles 1993, die Vermutung zu beweisen, allerdings nicht fehlerlos. Die Fehler in dem Beweis wurden 1995 von Wiles mit Hilfe Taylors behoben und das Ergebnis in einem gemeinsamen Artikel veröffentlicht (siehe Abb. 3.11). Das Beispiel von Wiles zeigt, dass selbst ein Mathematiker, der sich für mehrere Jahre zurückgezogen hatte, um ein Problem allein zu lösen, erst in Kooperation den Beweis bewältigen konnte. Auf diese Weise arbeiteten viele Mathematiker aus verschiedenen Teilen der Welt an dem Beweis der *Fermatschen Vermutung*.

Neben qualitativen Analysen von Vernetzungen in der Mathematik ist es beispielsweise möglich, durch Verbindung von Z-MATH mit dem *Organizational Risk Analyser* (ORA)[20] epistemisch-soziale Netzwerke zu visualisieren. ORA ist ein dynamisches Werkzeug für die Analyse und Visualisierung von Netzwerken, das auf ähnlichen wie bei Hischer (2010a, 110ff.) beschriebenen Abstandsberechnungen zwischen Knoten, Algorithmen und statistischen Prozeduren basiert. Um sozial-epistemische Netzwerke von Mathematikern in Deutschland von 1990 bis 2010 zu visualisieren, wurden nicht nur Mathematiker, sondern auch mathematische Disziplinen nach MSC als Knoten modelliert. Hier entstehen gleichermaßen durch Kanten modellierte Verbindungen durch Publikationen. In einem gemeinsamen Projekt mit Z-MATH entstand durch Verbindung von Daten aus Z-MATH und ORA die Abbildung 3.13. Angesichts der Größe der Abbildung können nur ausgewähle Knoten mit den Bezeichnungen der zugehörigen mathematischen Disziplinen beschriftet werden. Die restlichen Disziplinen werden ebenfalls durch gelbe Knoten

[20] CASOS/http://www.casos.cs.cmu.edu/projects/ora/[3.12.12]

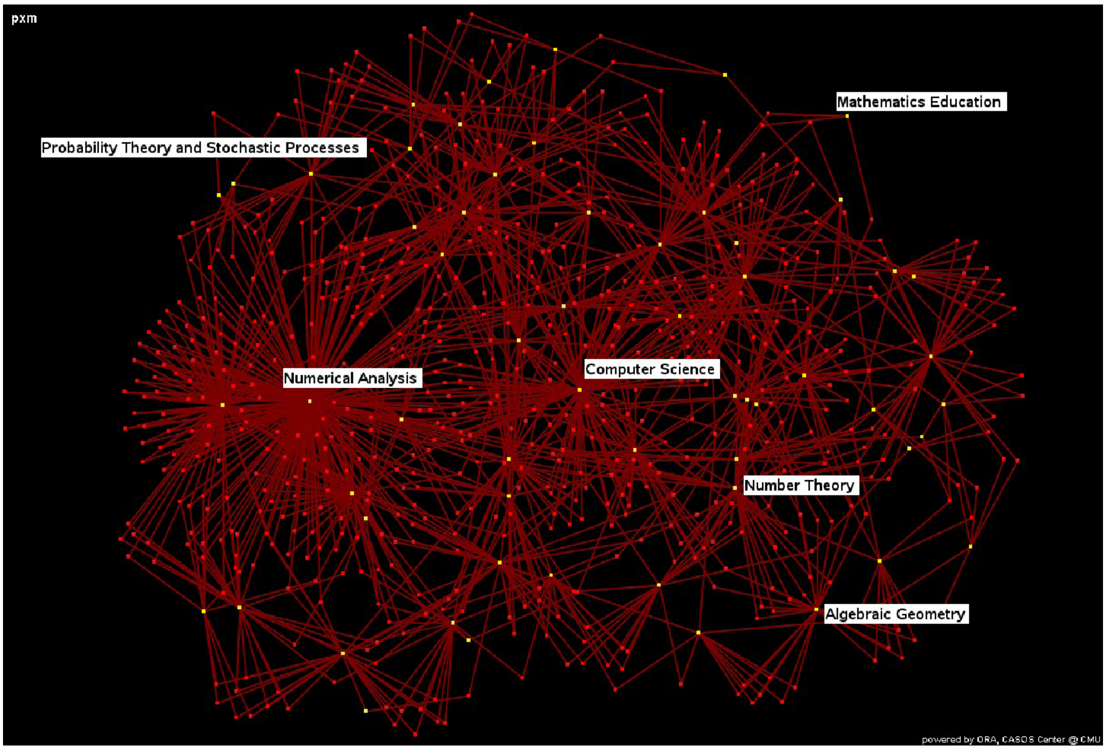


Abbildung 3.13: Mathematik als epistemisch-soziales Netzwerk

repräsentiert. Rote Knoten stehen für Mathematiker. Die Kanten, die durch gemeinsame Autorschaften entstehen, werden nach den ORA-Algorithmen gezeichnet. Die Abbildung 3.13 deutet an, dass innerhalb der mathematischen Gemeinschaft bedingt durch innermathematische Disziplinen als Themen der Kommunikation Expertennetzwerke entstehen. Das Diagramm illustriert, dass die Kommunikation innerhalb der Subnetzwerke häufiger ist. Zwischen den Expertennetzwerken existieren wiederum Verbindungen, die durch gemeinsame Publikationen von Vertretern aus verschiedenen Expertenkreisen zustande kommen. Darüber hinaus zeigt die Abbildung 3.13 beispielsweise Disziplinen, die mehr Verbindungen mit anderen aufweisen als andere. Dazu zählt die *Numerische Analysis*. Eine mögliche Interpretation dieser Tatsache könnte die breite Anwendung von numerischen Methoden in anderen Disziplinen der Mathematik sein. Wenn Mathematiker keine analytischen Lösungen für ihre Probleme finden, versuchen sie häufig, numerische Methoden anzuwenden.

Somit wird die Bedeutung von innermathematischen Zusammenhängen in der Wissenschaft unterstrichen, auch die Auffassung von mathematischen Gebieten als Subkulturen oder Expertennetzwerken innerhalb der Mathematik sowie die Notwendigkeit der Vermittlung zwischen diesen wird dadurch bekräftigt. Ausgehend davon lässt sich vermuten, dass die Bildung von themengebundenen Expertennetzwerken auch im Mathematikunterricht vorteilhaft sein kann, um den Anforderungen eines „vernetzten Unterrichts“ wie bei Hischer zu genügen. Mit Rückblick auf die am Anfang von 3.3 ausgewählten Leitfragen lassen sich als Hinweise zusammenfassend folgende Behauptungen formulieren:

- Mathematik ist eine Wissenschaftsdisziplin, die nicht nur durch Kohärenz oder Beziehungshaltigkeit unter erkenntnisstheoretischen Gesichtspunkten gekennzeichnet ist, sondern als einen hohen Konsens auf der sozialen Ebene aufweist.
- Die Beziehungshaltigkeit der Mathematik und der hohe soziale Zusammenhalt hängen mit der formal-axiomatischen Methode zusammen. Das Beweisen kann nicht nur als wissenschaftliche Methode, sondern auch mathematikspezifisches Kommunikationsmittel aufgefasst werden.
- Die Bildung von Expertennetzwerken und Kooperationen fördern darüber hinaus die Entstehung von Verbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Gebieten.
- Mathematiker unterstreichen die Bedeutung von Kommunikation für die Entwicklung von Mathematik als einer wissenschafftichen Disziplin und für den Mathematikunterricht.
- Linearität und Konventionalität der mathematischen Fachsprache tragen zur Beziehungshaltigkeit auf der epistemischen und zum Konsens auf der sozialen Ebene bei, können jedoch direkte mündliche Kommunikation bei der Ideenfindung erschweren. Diese kann wiederum durch Visualisierungen erleichtert werden.

Der letzte Punkt soll zum nächsten Abschnitt überleiten. In diesem wird der Ansatz von Kvasz vorgestellt, der sich mit sprachlichen Aspekten der Mathematik aus einer historischen Perspektive beschäftigt. Das Besondere an dem Ansatz von Kvasz ist, dass er Visualisierungen oder Zeichnungen nicht nur als heuristische Mittel betrachtet, sondern als Elemente einer Sprache.

3.4 Linguistische Aspekte der Mathematik nach Kvasz

Kvasz (2008) unterscheidet zwischen *symbolischen* und *ikonischen* Sprachen innerhalb der Mathematik und behauptet, dass die Entwicklung dieser Sprachen nicht direkt von einer symbolischen Sprache zu einer anderen verläuft, sondern über sogenannte ikonische Stadien. So beschreibt er die in der Geschichte der Mathematik erste symbolische Sprache, nämlich die Sprache der Arithmetik, als sogenannte „nonexplanatory language“. Demnach ermöglicht zwar die symbolische Sprache der Arithmetik die Regeln oder

Rezepte für viele konkrete Rechenaufgaben aufzuschreiben. Jedoch zum Aufstellen bzw. zum Aufschreiben von allgemeinen formalen Regeln reicht sie nicht aus. Anders ist es mit der ikonischen Sprache der Elementargeometrie:

> *„We interpret a picture as a term of the iconic language. Then a geometrical construction becomes a generating sequence of the resulting expression (picture)."* (Kvasz 2008, 12)

Zur ikonischen Sprache gehören nicht nur Zeichnungen von geometrischen Figuren, sondern auch ihre verbalen Beschreibungen. Geometrische und arithmetische Zusammenhänge können nach Kvasz mit Hilfe von Zeichnungen dargestellt werden und sich von den konkreten arithmetischen Werten ablösen. Die Zeichnungen sind in diesem Sinne keine Variablen, die Objekte lediglich bezeichnen, sondern sie repräsentieren diese.[21] Aber auch die ikonische Sprache der Geometrie hat ihre Grenzen. So kann in der Sprache der Geometrie beispielsweise die Unmöglichkeit der Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal zwar aufgedeckt, jedoch nicht begründet werden. Die Mittel dafür liefert erst die symbolische Sprache der Algebra (vgl. Kvasz 2008, 14ff.).

Das Wechselspiel zwischen symbolischen und ikonischen Sprachen innerhalb der Mathematik erlaubt aus der Perspektive von Kvasz das Ablösen von der physischen Realität. Die Möglichkeit des Ablösens von der physikalischen Realität wird bei Maaß und Kleinert als eine besondere Eigenschaft der Mathematik beschrieben. Das Ablösen von einem bestimmten mathematischen Gebiet zugunsten der Kohärenz innerhalb eines anderen wird bei Maaß im Zusammenhang mit dem „pragmatischen Formalismus" angedeutet (vgl. 3.3.2). Dies ist auch nach Kvasz eine weitere Eigenschaft, die Mathematik charakterisiert:

> *„Mathematics has a tendency to empty its concepts of their original semantic content and to make them independent of the original motivation for which they were introduced [...]. Mathematical creativity is often facilitated by the transfer of notion, which was originally introduced in particular area of mathematics, in a particular context, and for a particular purpose into a different area, a different context, and for different purposes. In order to make such transfer easier, since they are among the main sources of progress in mathematics, mathematicians naturally tend to decontextualize their concepts. They try to liberate their dependence on particular contexts, and the particular motivation of their introduction. When a concept becomes generally accepted and widely used by mathematical community, it is to a large degree deprived from content."* (Kvasz 2008, 220f.)

So untersucht Kvasz vor allem die Übergänge zwischen Arithmetik, Algebra, Differenzial- und Integralrechnung und Prädikatenkalkül. Kvasz behauptet beispielsweise, dass die Einführung von Variablen, die den Übergang von der Arithmetik zur Algebra markiert, in zwei Schritten durchlaufen wurde. Der erste Schritt war die Entdeckung von unbe-

[21] Hierin wird der in 3.2 angedeutete Unterschied zwischen Symbolen und Ikonen aufgegriffen.

stimmten Streckenlängen. Der zweite Schritt war vollzogen, als für Bezeichnungen für unbekannte Längen Variablen eingeführt wurden. Ein analoges ikonisches Zwischenstadium in der Entwicklung der Sprache fand bei der Einführung von Notationen für Funktionen statt. Im ersten Schritt wurde in der analytischen Geometrie die Idee der Kurve als einer Repräsentation der Abhängigkeit zwischen zwei Variablen geboren. Im nächsten Schritt wurde für diese neu geborene Idee eine passende symbolische Repräsentation gefunden (vgl. Kvasz 2008, 12).

Ikonische Sprachen, die Kvasz beschreibt, dienten einerseits der Visualisierung von rein symbolischen Ausdrücken. Andererseits führten ikonische Sprachen zum Entdecken neuer geometrischer Formen und Phänomene. So haben beispielsweise Lösungen von polynomialen Gleichungen eine geometrische Interpretation als Schnittpunkte mit einer Parallelen zur x-Achse bekommen. Ähnlich brachte die fraktale Geometrie eine Möglichkeit mit sich, Grenzwertprozesse zu visualisieren. Derartige Visualisierungen gewähren Mathematikern neue Einsichten in schon bekannte Problematiken und Phänomene. Die Idee, unbestimmte Strecken mit Variablen zu bezeichnen, ist eng mit dem Konstruieren von geometrischen Figuren verbunden.

Die Idee der Funktion wurde schon in der analytischen Geometrie angedeutet, aber noch nicht symbolisch repräsentiert. Die Symbolisierung von Bezeichnungen von Funktionen erleichterte die Entwicklung der Differenzial- und Integralrechnung. Derartige Veränderungen in der mathematischen Sprache werden bei Kvasz als Visualisierung und Symbolisierung interpretiert und als sogenannte „re-codings“ bezeichnet (vgl. Kvasz 2008, 85).

Das Wechselspiel zwischen ikonischen und symbolischen Sprachen liefert also neue Objekte, neue Einsichten in bekannte Phänomene und erlaubt eine Loslösung von gegebenen Kontexten bzw. Gebieten. Durch Übersetzungen von symbolischen zu ikonischen Sprachen können auch Grenzen jeder dieser Sprachen aufgezeigt werden. Übersetzungen können aber auch helfen, diese Grenzen zu überwinden. Der Übergang von einer ikonischen zu einer symbolischen Sprache oder umgekehrt kann neue Ausdrucks- und Beweismittel liefern, in der jeweils anderen Sprache entstandene Widersprüche auflösen oder Fehler beseitigen sowie zur Integration von bereits Bekanntem und neuem Wissen beitragen. Die Schlussfolgerungen aus der Arbeit von Kvasz überschneiden sich mit Ideen von Winter (1999), der das Wechselspiel von Gestalt und Zahl als Quelle für kreatives Problemlösen in Mathematikunterricht sieht.

Kvasz	Winter
Übersetzungen zwischen ikonischen und symbolischen Sprachen ...	Wechselspiel zwischen Gestalt und Zahl, Möglichkeiten der doppelten Repräsentation ...
... liefern neue Objekte, neue Einsichten in bekannte Phänomene;	... geben Anstöße für Aktionen, die geeignet sind, sich einen Sachverhalt zu erschließen;
... erlauben eine Ablösung von dem gegebenen Kontext im gegebenen Gebiet, können Grenzen einer Sprache aufzeigen, helfen diese Grenzen zu überwinden;	... vermehren das Verständnis für einen mathematischen Inhalt;
... erlauben neue Ausdrucksmittel;	... sind nicht ein Surrogat des Denkens, vielmehr der Ausdruck des Denkens, das Einsicht und Sinngebung intendiert;
... liefern neue Beweismittel, die in der anderen Sprache entstandene Widersprüche auflösen oder Fehler beseitigen;	... üben Problemlöseverhalten;
... tragen zur Integration von bereits bekanntem und neuem Wissen bei;	Gestalthaftes wird nicht als scheinbar unmittelbar Verständliches (was kaum der Fall ist) vorgesetzt, sondern mit den Schülern erarbeitet.

Die Ausführungen von Kvasz (3.4) enthalten darüber hinaus konkrete fachinhaltiche Hinweise dafür, wie die Übersetzung zwischen ikonischen und symbolischen Sprachen im Unterricht geschehen kann. Einige von ihnen werden im Folgenden stichpunktartig zusammengefasst und im Kapitel 4 bei der Konstruktion von Aufgabennetzen aufgegriffen:

- Einführung von Variablen zur Bezeichnung von unbestimmten Streckenlängen;
- funktionale Abhängigkeiten zwischen geometrischen Größen;
- graphische Repräsentation von funktionalen Abhängigkeiten;
- Funktionsgraphen als geometrische Objekte;
- Lösungen von bestimmten Gleichungen als Schnittpunkte mit der x-Achse;
- fraktale Geometrie als Visualisierung von Grenzwertprozessen;[22]

[22] Mandelbrot (1989, 7) weist auf besondere Möglichkeiten der fraktalen Geometrie hin: *„[...] the best is to call fractal geometry a new geometric language, which is great towards the study of aspects of diverse objects, either mathematical or natural, that are not smooth, but rough and fragmented to the same degree at all scales.“* In 4.1 werden diese Aspekte der fraktalen Geometrie in Aufgabennetzen aufgegriffen.

- geometrische Visualisierungen als Vorbereitung der Differenzial- und Integralrechnung.[23]

3.5 Konsequenzen für „vernetzenden Unterricht"

In 3.1 wurde gezeigt, wie die Merkmale eines „vernetzenden Unterrichts" nach Hischer und Kategorien von Vernetzungen nach Brinkmann sich als theoretische Aspekte der vorliegenden Arbeit kombinieren lassen. Die Abschnitte 3.2 bis 3.4 dienen dazu, einerseits Erkenntnisse aus 3.1 theoretisch zu stützen, andererseits diese um eine weitere Kategorie zu ergänzen. So wurde in 3.2 eine Erweiterung des Modellierungsbegriffes vorgenommen, um auf der einen Seite die von Brinkmann vorgeschlagenen innermathematischen Modellvernetzungen zu unterstützen, andererseits Einkleidungen von mathematischen Phänomenen in außermathematische Situationen als eine zusätzliche Vernetzungskategorie einzuführen. Somit wird der bereits bei Kießwetter (vgl. 2.3.1) anklingende Gedanke, das Potenzial außermathematischer Situationen als Repräsentationsmöglichkeit im Unterricht zu berücksichtigen, aufgegriffen. Es werden Bezüge zu Fischers Hinweisen auf Analogien als Möglichkeiten der Vernetzung hergestellt (3.3). Die Erweiterung des Kategoriensystems von Brinkmann schafft zusätzliche Anknüpfungspunkte für die Ansätze *Beziehungshaltigkeit* und *Vernetzungen im Mathematikunterricht*, weil sie beispielsweise Freudenthals und Wittenbergs Ideen zu außermathematischen Analogien im Mathematikunterricht aufgreift (vgl. 2.2.4, 2.2.5). Gleichermaßen sprechen die Ausführungen zu linguistischen Aspekten der Mathematik im Sinne von ikonischen und symbolischen Sprachen nach Kvasz für das Potenzial der von Brinkmann beschriebenen und empirisch beobachteten innermathematischen Modellvernetzungen als „Übersetzungen" (vgl. 3.4).

Durch die Umkehrung des Modellierungskreislaufes wird es möglich, Modellierungsprozesse als Beispiele für „Vernetzen" im Sinne von Hischer aufzufassen (vgl. 2.3.3). Verschiedene Möglichkeiten für Übersetzungen mathematischer Phänomene zwischen verschiedenen mathematischen Sprachen sowie Einkleidungen in außermathematische Situationen bieten eine Vielfalt von Perspektiven und somit zahlreiche verschiedene Wege, die in einem „vernetzenden Unterricht" von Schülern und Lehrern beschritten werden können. Diese Vielfalt stellt sowohl an Schüler wie auch an Lehrer hohe kognitive und soziale Anforderungen. In diesem Zusammenhang stellen sich Fragen nach sozialen Aspekten des Mathematikunterrichts und der Mathematik. Diese wurden ausgehend von einem erweiterten Disziplinbegriff in der Wissenschaftsforschung nach Fischer, Tenorth, Stichweh, Flach in (3.3.1) und in der Mathematik insbesondere nach Maaß, Kleinert,

[23]Der letzte Punkt bietet Überschneidungen mit der Arbeit von Hoffkamp (2011), in der Aspekte der dynamischen Visualisierung mit Hilfe des Computers und unter Berücksichtigung von sozialen Aspekten der Lerngruppe in Form von Partnerarbeit betrachtet werden.

Heintz und Wille (3.3.2) mit Blick auf die Selbstwahrnehmung der Mathematiker diskutiert. Diese Betrachtungen führen zu einem erweiterten Verständnis von Mathematik als einem epistemischen und sozialen Phänomen.

Wird mathematische Forschung in Wechselwirkung epistemischer und sozialer Komponenten betrachtet, so kann vermutet werden, dass die formale, aus linearen Zeichenabfolgen bestehende, mathematische Fachsprache mit einer hohen Kohärenz der Mathematik auf der theoretischen Ebene und mit günstigen Voraussetzungen für Konsensfindung auf der sozialen Ebene zusammenhängt. Durch die formal-axiomatische Methode wird in der Mathematik das Ablösen von der physischen Realität zugunsten innermathematischer Kohärenz möglich. Gerade an dieser Stelle wird das Potenzial der mathematischen Fachsprache nicht nur für Kohärenz-, sondern auch für Differenzerfahrungen in Bezug auf die Alltagssprache und Alltagserfahrungen deutlich (vgl. 2.1.2). Insofern werden durch die Überlegungen in 3.3 Vorschläge von Vohns (2010) für eine ausgewogene Sichtweise auf Kohärenz und Differenz von Mathematik und Alltagserfahrungen der Schüler unterstützt.

Wenngleich die formal-axiomatische Methode und die konventionalistische Sprache der Mathematik in wissenschaftlichen Publikationen beispielsweise nach Maaß, Heintz und Wille zum Zusammenhalt der Mathematiker beitragen, können sie Wille zufolge zugleich eine direkte Kommunikation im Forschungsprozess erschweren (3.3.2). Diese wird nach Wille durch Visualisierungen erleichtert, die weniger restriktiv und stärker ganzheitlich wirken. Die Feststellungen von Wille korrelieren mit den von Maier und Schweiger (1999, 43) zusammengefassten Unterschieden zwischen visuellen und verbal-algebraischen Symbolen, die in der Tabelle auf der Seite 122 gegenübergestellt sind.

Die Eigenschaften visueller Symbole erlauben Vermutungen über ihre kommunikativen Funktionen aufzustellen. So heben visuelle Symbole räumliche Eigenschaften hervor und helfen mit der Linearität der Sprache verbundene Schwierigkeiten beim Vernetzen zu überwinden.[24] Wenngleich sie schwer übertragbar sind, wirken sie zusammenfassend und können die Kernaussage eines symbolischen Ausdrucks „sichtbar“ machen. Dadurch, dass die enthaltenen Informationen gleichzeitig gegeben werden, wird somit der Linearität der Zeit begegnet. Zeichnungen und Diagramme fördern nach Dormolen (1978, 67) darüber hinaus intuitives Denken. Im Gegensatz dazu machen erst verbal-algebraische Symbole das Aufschreiben von logisch-deduktiven Schlussfolgerungen möglich. Die Gegenüberstellung macht Potenziale, aber auch Grenzen von Visualisierungen in Bezug auf die Kommunikation deutlich. Da Visualisierungen weniger konventionell sind, können sie auch missverstanden werden.

[24] Dies gilt auch für *Concept Maps* nach Brinkmann (vgl. 2.3.2, 3.1).

visuelle Symbole (z.B. geometrische Zeichnungen und Diagramme)	**verbal-algebraische Symbole** (z.B. Terme und Gleichungen)
heben räumliche Eigenschaften hervor	betonen nicht räumliche Eigenschaften
sind schwer übertragbar	sind leichter übertragbar
wirken zusammenfassend, wodurch die Struktur sichtbar wird	wirken analysierend, wodurch Details sichtbar werden
relevante Information erfolgen gleichzeitig	relevante Informationen werden zeitlich nacheinander gegeben
fördern intuitives Denken	fördern logisch-deduktives Denken

Vergleiche zwischen algebraischen und visuellen Symbolen könnten bereits im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I stattfinden, somit könnte ein konkreter Beitrag zu Kohärenz- und Differenzerfahrungen der Schüler innerhalb der Mathematik geleistet werden (vgl. 2.1.2).

Die in der Gegenüberstellung ausgearbeiteten Unterschiede zwischen visuellen und verbal-algebraischen Mitteln stehen im Einklang mit dem Ansatz von Kvasz, der zwischen ikonischen und symbolischen Sprachen der Mathematik unterscheidet. Auch kommunikative Möglichkeiten und Grenzen geometrischer Visualisierungen werden dadurch bestätigt. Mit Blick auf Winters Ausführungen und im Rückblick auf Kleins Überlegungen zu Veranschaulichungen als Selbstzweck (vgl. 2.2.1) sprechen Ausarbeitungen zu linguistischen Aspekten der Mathematik (3.4) für die Feststellungen von Winter (1989) sowie Maier und Schweiger (1999).[25] Demnach haben Veranschaulichungen oder Anschauung nicht lediglich eine Hilfsfunktion im Unterricht, indem sie abstrakte Zusammenhänge verdeutlichen. Vielmehr behauptet Winter (1989, 138):

> *„[...] dass Erkenntnisfortschritt darin besteht, dass gleichzeitig zwei Prozesse sich gegenseitig ergänzen und begrenzen: begriffliches Erweitern, Verallgemeinern und Verfeinern einerseits und anschauliches Detaillieren, Konkretisieren, Spezifizieren in weitere und entferntere Phänomenbereiche andererseits.“*

Wie bereits an den in 2.5 beschriebenen Erprobungen beispielsweise im Zusammenhang mit der Veranschaulichung von Elementen der Bruchrechnung deutlich geworden ist, muss der zweite Teil für die Schüler kognitiv nicht weniger anspruchsvoll sein und nicht automatisch zur Vereinfachung von abstrakten Zusammenhängen führen. Insofern kann die geometrische Veranschaulichung einer bereits bekannten, durch arithmetische und algebraische Mittel ausgedrückten Regel als Lösen eines anspruchsvollen mathematischen Problems interpretiert werden. Gleichermaßen weisen Maier und Schweiger (1999, 87f.) darauf hin, dass ein Wechsel zwischen anschaulichen und symbolischen Darstellungen im Mathematikunterricht keine Einbahnstraße sein darf und unterstreichen die Bedeutung sogenannter symmetrischer Transfers.

[25] Vollrath (1993) spricht in diesem Zusammenhang von Paradoxien des Verstehens zwischen mathematischer Strenge und Anschauung.

Eine weitere wichtige Konsequenz des vorliegenden Kapitels für „vernetzenden Unterricht“ ist die Betrachtung mathematischer Beweise nicht nur aus einer erkenntnistheoretischen Perspektive, sondern auch unter sozialen Aspekten (3.3). Demnach ist ein mathematischer Beweis nicht nur ein Mittel zur Wahrheitsfindung und Wahrheitssicherung, sondern auch ein Mittel zum Überzeugen von sich selbst und anderen. Im Kontext der Ergebnisse aus 3.4 treten dabei vor allem geometrische Beweisfiguren nicht nur in ihrer erkenntnistheoretischen, sondern auch in ihrer kommunikativen Funktion im Unterricht auf.

Schließlich lassen Einblicke in die Innenwelt der Mathematiker in 3.3 die Bildung von Expertennetzwerken im „vernetzenden Unterricht“ als geeignete Sozialform erscheinen. Im Kapitel 4 werden nun Aufgabennetze vorgestellt, die die dargelegten Hinweise berücksichtigen. Im Sinne der Ausführungen dieses Kapitels und der bereits in 2.1 und 2.4 ausgearbeiteten Bedeutung der Geometrie für Beziehungshaltigkeit wird das erste Aufgabennetz um die Erweiterung der Beweisfigur des Satzes des Pythagoras zentriert. Die Aufgaben des Netzes wurden für die Bearbeitung in Schülerexpertennetzwerken entwickelt. Sie können aber auch in anderen Sozial- und Arbeitsformen eingesetzt werden.

4 Konstruktion und praktische Erprobung von *Aufgabennetzen*

Das Ziel des vorliegenden Kapitels besteht in der Illustration von theoretisch gewonnenen Erkenntnissen durch die Konstruktion von Beispielen für *Aufgabennetze*. Hierbei werden folgende bereits in vorigen Abschnitten thematisierte Leitfragen herangezogen und nun aus einer praxisbezogenen Perspektive betrachtet:

- Wie kann die Lerngruppe als soziales Phänomen produktiv bei der Entstehung von kapitelübergreifenden Bezügen berücksichtigt werden?
- Welche mathematischen Probleme oder Kontexte eignen sich am besten zum Herstellen von kapitelübergreifenden Bezügen?
- Wie müssen *Aufgabennetze* gestaltet sein, um vernetzendes Denken der Schüler zu fördern?

Nach den Ausarbeitungen in Kapitel 3 liegt es nahe, bei der Konstruktion von *Aufgabennetzen* das Augenmerk auf innermathematische Modellvernetzungen zu legen und Einkleidungen in außermathematische Situationen als zusätzliches Mittel dafür zu berücksichtigen. Überlegungen zu epistemischen und sozialen Aspekten der Mathematik lassen vermuten, dass kooperative Lernformen wie Gruppenarbeit beim Herstellen von kapitelübergreifenden Bezügen förderlich sein könnten. Ausgehend von den Ausarbeitungen in 3.3 und 3.5 erscheint beispielsweise die Bildung von Expertengruppen als eine passende unterrichtsmethodische Möglichkeit.

Nach den Ausführungen zu den theoretischen Aspekten der Beziehungshaltigkeit und Vernetzungen, der Entwicklung des Aufgabennetzes „Tangram“ (vgl. 2.1.2, 2.2.1, 2.4, 2.5) und der Weiterentwicklung der theoretischen Aspekte (vgl. 3) erscheint es von Vorteil, geometrische Kontexte zu wählen und diese um ein geometrisches Modell, eine Zeichnung oder gar eine Beweisfigur zu zentrieren. Dies wird im Folgenden anhand der Aufgabennetze „Pythagorasbaum“ (vgl. 4.1) und „Rund ums Sechseck“ (vgl. 4.2) veranschaulicht. Dafür werden die gewählten geometrischen Kontexte und ihre Verbindungen zu den weiteren Bereichen der Mathematik in der Sekundarstufe I analysiert (vgl. 4.1.1, vgl. 4.2.1). Daraufhin werden mit Bezug auf den Berliner Rahmenlehrplan Aufgaben sowie

Vorschläge für einen Unterrichtseinsatz konstruiert (vgl. 4.1.2, vgl. 4.2.2). Anknüpfend daran folgen Berichte über Erfahrungen aus den Erprobungen mit Schülern, Studierenden (vgl. 4.1.3) und Lehrern (vgl. 4.2.3). An geeigneten Stellen werden die *Aufgabennetze* mit Rückblick auf die Kapitel 1, 2 und 3 reflektiert und als Gestaltungsprinzipien für *Aufgabennetze* zusammengefasst (vgl. z.B. 4.1).

4.1 „Pythagorasbaum“

Bei der Entwicklung dieses Aufgabennetzes wird zunächst das Potenzial des Kontextes in Bezug auf Inhalte der Sekundarstufe I analysiert, um anschließend ausgehend davon exemplarisch Aufgabenstellungen zu entwerfen. Dabei werden nicht nur die Vorgaben des Rahmenlehrplans, sondern auch Lernvoraussetzungen und Vorschläge konkreter Schülergruppen berücksichtigt. Diese wurden in Kooperation mit den Lehrern ermittelt.

4.1.1 Entwicklung der Initialaufgaben

Die Suche nach Beweisfiguren, die einen Ansatzpunkt für die Gestaltung von Aufgabennetzen bieten könnten, führt über Klein (vgl. 2.2.1), Lietzmann (vgl. 2.2.3) und Brinkmann (vgl. 2.3.2) zu geometrischen Kontexten und insbesondere zum Satz des Pythagoras. Für Winter (1989) ist der Satz des Pythagoras einer der wichtigsten Sätze im Kanon der allgemeinbildenden Schule. Als Beleg dafür nennt er den „Beziehungsreichtum“ des Satzes. Dies veranschaulicht er mit Hilfe des folgenden Diagramms (siehe Abb. 4.1). Ähnlich wie bei den Wittenbergschen Themenkreisen (vgl. 2.2.4) werden hier ausgehend von einer geometrischen Figur im Zentrum inhaltliche Bezüge dargestellt. Diese beziehen sich in diesem konkreten Fall auf Themenbereiche der Klassenstufen 9 und 10 (vgl. Winter 1989, 81).

Neben vielfältigen innergeometrischen Bezügen werden bei Winter ausgehend von der Satzgruppe des Pythagoras Bezüge zur Arithmetik, Algebra (Pythagoreische Zahlen, Graphisches Wurzelziehen) und zu Funktionen (Trigonometrische Funktionen, Längen-, Flächen- und Volumenbestimmungen) sowie zur Koordinatengeometrie hergestellt. Mit Rückblick auf die Themenkreise von Wittenberg (vgl. 2.2.4), den Bezug auf den Berliner Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I und fachinhaltliche Hinweise von Kvasz (vgl. 3.4) stellen sich bei der Entwicklung von konkreten Aufgabenstellungen folgende Fragen: *Wie kann der Satz des Pythagoras bereits in den unteren Klassenstufen vorbereitet werden? Wie kann die Beweisfigur des Satzes des Pythagoras zur Veranschaulichung von Brüchen herangezogen werden? Wie können Bezüge zu den Elementen der Stochastik hergestellt werden? Wie kann mit Hilfe des Satzes des Pythagoras die Differenzial- und Integralrechnung vorbereitet werden? Wie können Bezüge zu den Potenz- und*

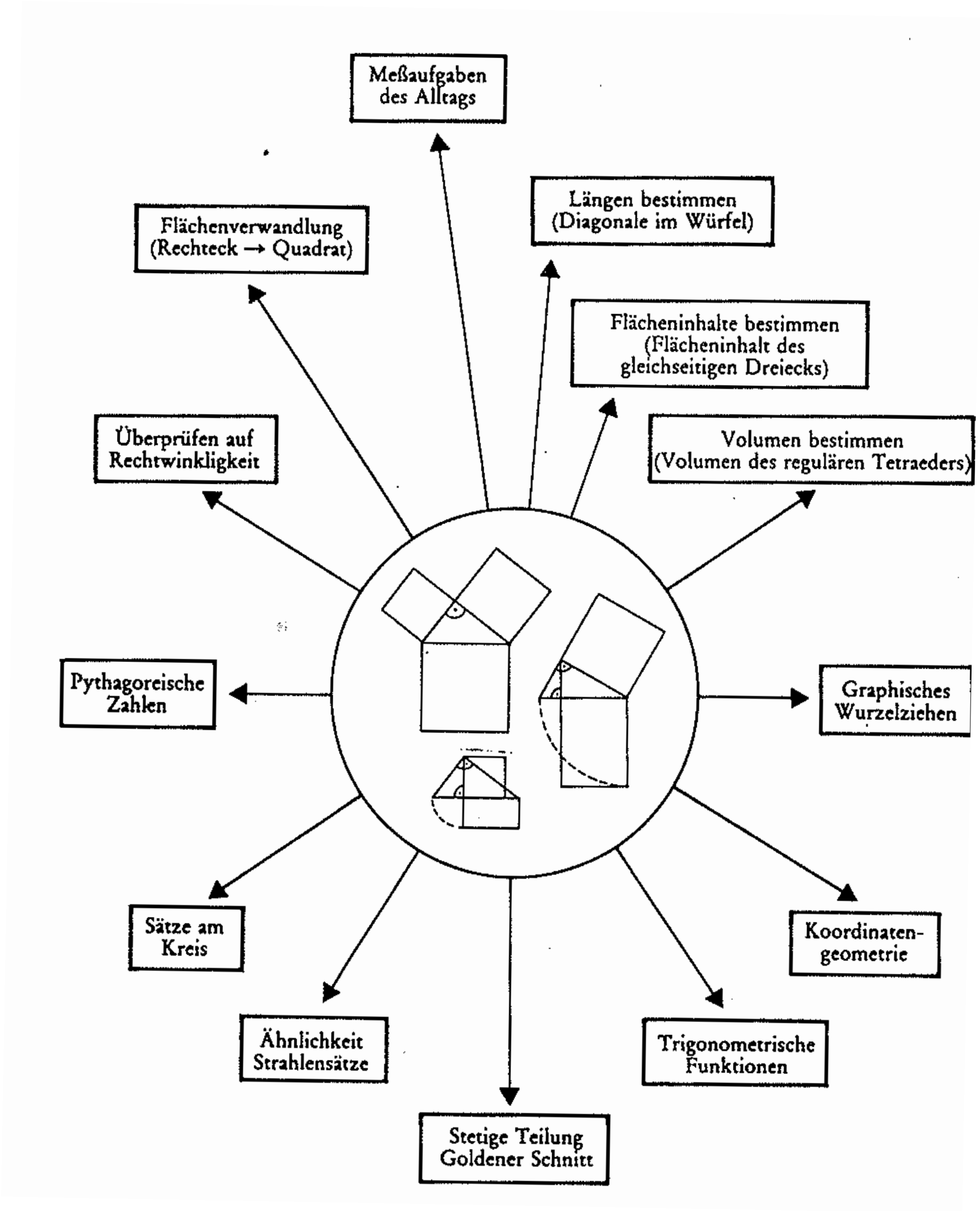


Abbildung 4.1: Beziehungsreichtum des Satzes des Pythagoras

Logarithmusfunktionen hergestellt werden? Wie kann die Beweisfigur variiert werden, um weitere kapitelübergreifende Bezüge herzustellen? Welche Bezüge könnten mit Hilfe fraktaler Geometrie hergestellt werden? Welche Erkenntnisse könnten im Wechselspiel *von Gestalt und Zahl erzielt werden? Welche Symmetrien und Asymmetrien sind hierbei von Bedeutung?*

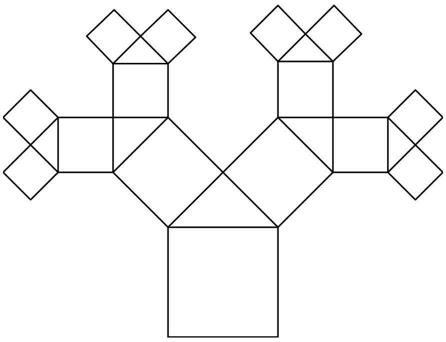


Abbildung 4.2: Pythagorasbaum

Um verschiedene Antwortmöglichkeiten auf die oben gestellten Fragen anzubieten und von dem gewöhnlichen Kontext der Satzgruppe des Pythagoras abzuweichen, kann der Pythagorasbaum zum zentralen fachinhaltlichen Gegenstand des *Aufgabennetzes* werden. Der Pythagorasbaum ist ein Fraktal. In der Abbildung 4.2 wird ein dreistufiger symmetrischer Pythagorasbaum dargestellt.

Der symmetrische Pythagorasbaum wurde während des Zweiten Weltkriegs von dem holländischen Ingenieur Bosman zufällig entdeckt. Auf dem gleichen Zeichenbrett, auf dem er seine U-Boote entwarf, konstruierte Bosman zunächst drei Quadrate an den Seiten eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks. Neugierig darauf, welche Figur bei der Fortführung des Musters entstehen würde, setzte er neue rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke an den Quadraten an, um wiederum neue Quadrate an den rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecken anzusezten, und wiederholte die Schritte mehrfach hintereinander. Auf einem Blatt von der Größe 60 cm x 80 cm erweiterte er das Muster so lange, bis die Teilfiguren zu klein und zu verzweigt zum Zeichnen waren. Die 1957 veröffentlichte Zeichnung des Pythagorasbaumes inspirierte Künstler wie beispielsweise Jos de Mey.

Allen Fraktalen gemeinsame Eigenschaften sind Selbstähnlichkeit und Rekursion. Wird auf eine Grundfigur eine bestimmte Regel angewandt und rekursiv wiederholt, so entstehen neue Figuren. Diese sind zu einem gewissen Grad selbstähnlich: Wird ein Teil von einer neu entstandenen Figur vergrößert, so entstehen reduzierte Kopien der Gesamtfigur. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den symmetrischen Pythagorasbaum zu modifizieren. Eine wichtige Modifikation besteht darin, dass nicht-gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke zur Grundlage des Baumes werden (vgl. Posamentier 2010, 211ff.).

Potenzialanalyse des fachinhaltlichen Beziehungsgeflechts

Im Folgenden wird zunächst von dem symmetrischen Fall des Pythagorasbaumes ausgegangen (siehe Abb. 4.2). Seine fachinhaltlichen Bezüge, die auf der Seite 140 diagrammatisch[1] zusammengefasst sind, werden Klassenstufen zugeordnet und näher betrachtet. Der Pythagorasbaum kann bereits in den Klassenstufen 5. und 6. bei der Beschäfti-

[1] In die Abbildung ist ein Bild von Jos de Mey integriert.

gung mit geometrischen Fragestellungen (Symmetrien, spezielle Dreiecke und Vierecke, Kongruenz), aber auch in anderen Gebieten (beispielsweise zur Veranschaulichung von Brüchen) herangezogen werden.

Die Abkürzung 5+ steht für Klassenstufen ab 5 und ist als Richtwert zu verstehen. Im Folgenden werden auch weitere Klassenstufen entsprechend abgekürzt.

Veranschaulichung von Elementen der Bruchrechnung (5+)

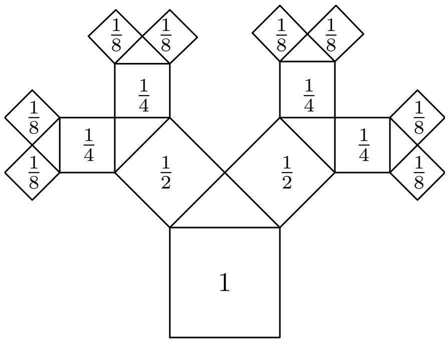


Abbildung 4.3: Brüche

Den einzelnen Teilflächen des dreistufigen symmetrischen Baumes können Brüche zugeordnet werden. Durch Einteilen in flächeninhaltsgleiche Teilfiguren kann das Erweitern und das Kürzen von Brüchen dargestellt werden. Durch Vergleichen, Zerlegen und Kombinieren flächeninhaltsgleicher und unterschiedlich großer Teilflächen lassen sich die Addition und Subtraktion von Brüchen darstellen.[2]

Wird dem Stammquadrat der Flächeninhalt 1 zugeordnet, so kann sein Flächeninhalt als ein Ganzes auftreten. Da die Summe der Flächeninhalte der Quadrate in der nächsten Stufe ebenfalls 1 ergibt, können diese beiden Quadrate jeweils $\frac{1}{2}$ darstellen. Analog kann den Quadraten in der 2. Stufe jeweils $\frac{1}{4}$ und den Quadraten in der 3. Stufe jeweils $\frac{1}{8}$ zugeordnet werden. Dies erlaubt durch Einteilen des Stammquadrates in Quadrate der 2. Stufe beispielsweise die Rechnung $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ zu veranschaulichen. Dafür können größere Quadrate mit kleineren Quadraten ausgelegt werden. Durch das Herausnehmen von kleineren Quadraten ist eine Veranschaulichung der Subtraktion denkbar.

Der Vorteil des Pythagorasbaumes als einer selbstähnlichen Figur besteht darin, dass Brüche nicht nur durch Flächeninhalte, sondern auch durch Verhältnisse zwischen diesen repräsentiert werden können. Dies bietet eine Möglichkeit, die Multiplikation und Division von Brüchen zu veranschaulichen. So kann beispielsweise $\frac{1}{4}$ als Verhältnis zwischen dem Flächeninhalt eines Quadrates in der 2. Stufe und dem Flächeninhalt des Stammquadrates aufgefasst werden. Das Verhältnis zwischen dem Flächeninhalt eines Quadrates aus der 3. und dem Flächeninhalt eines Quadrates aus der 1. Stufe beträgt ebenfalls $\frac{1}{4}$. Der Flächeninhalt eines Quadrates 1. Stufe verhält sich wiederum zu dem Flächeninhalt des Stammquadrates wie 1 : 2 und stellt somit $\frac{1}{2}$ dar. Um ausgehend davon

[2] In der Regel ist der Satz des Pythagoras in Klasse 5 nicht bekannt, trotzdem ist es möglich, Zusammenhang (z.B. experimentell) erarbeiten.

das Verhältnis des Flächeninhalts eines Quadrates in der 3. Stufe zum Flächeninhalt des Stammquadrates zu ermitteln, wird das Verhältnis von beiden Verhältnissen gebildet bzw. werden in diesem Fall zwei Brüche multipliziert. Dabei ergibt sich 1 : 8 bzw. $\frac{1}{8}$. Durch den Bezug zum Flächeninhalt des Stammquadrates kann die Visualisierung zusätzlich unterstützt werden. Verhält sich der Flächeninhalt eines Quadrates in der 1. Stufe zu dem Flächeninhalt des Stammquadrates wie 1 : 2, so verhält sich wiederum der Flächeninhalt des Stammquadrates zu dem Flächeninhalt des Quadrates aus der 1. Stufe wie 2 : 1. Somit wird die Bildung von Kehrwerten und die Division von Brüchen geometrisch interpretiert (vgl. Nordheimer 2010c).

Demnach hat der Kontext des Pythagorasbaumes das Potenzial, den bei einer der Erprobungen (vgl. 2.5) aufgetretenen Problemen bei der Visualisierung der Multiplikation und Division von Brüchen zu begegnen. Die bei der Analyse des Pythagorasbaumes gewonnenen Erkenntnisse über Brüche als Verhältnisse zwischen Flächeninhalten ähnlicher Figuren können aber auch auf die Aufgabenstellungen rund um das Tangram übertragen werden. So ist es möglich, die Multiplikation und Division von Brüchen beispielsweise mit Hilfe von Verhältnissen zwischen den Flächeninhalten von drei dreieckigen Tangram-Steinen zu veranschaulichen. Wenngleich die Schüler Ähnlichkeit erst in der 9. Klasse kennenlernen, sind sie in der Lage, mit Hilfe von Kombinationen aus Steinen Verhältnisse zwischen den Flächeninhalten einzelner Dreiecke zu begründen.

Bei diesen Beispielen handelt es sich um repräsentative Vernetzungen nach Kießwetter (vgl. 2.3.1) oder innermathematische Modellvernetzungen nach Brinkmann (vgl. 2.3.2). Da mit Hilfe von Flächeninhalten und Verhältnissen zwischen ihnen nicht nur Brüche, sondern auch die Regeln der Bruchrechnung veranschaulicht und hergeleitet werden können, handelt es sich hierbei darüber hinaus um deduktive Vernetzungen nach Brinkmann (vgl. 2.3.2). Es darf jedoch nicht vergessen werden, dass Veranschaulichungen nicht automatisch zur Verbesserung des Verständnisses beitragen müssen (vgl. 3.4).

Koordinatengeometrie (7+)

Wird der Pythagorasbaum in ein Koordinatensystem gezeichnet und untersucht (siehe Abb. 4.4), so ergeben sich als Koordinaten der Eckpunkte entsprechende Zahlenpaare und Geradengleichungen. Anhand von Gleichungen können geometrische Zusammenhänge wie beispielsweise Parallelität und Orthogonalität beschrieben und untersucht werden.

So beschreiben beispielsweise die Gleichungen $y = x + 1,5$, $y = x + 2,5$ und $y = x + 3$ parallele Geraden (siehe Abb. 4.4). Es ist möglich, weitere den Strecken im Pythagorasbaum entsprechende parallele Geraden zu zeichnen und somit u.a. zu verdeutlichen, dass Gleichungen paralleler Geraden sich lediglich durch Summanden unterscheiden. Die Steigungen dieser Geraden und dementsprechend die Koeffizienten vor x bleiben

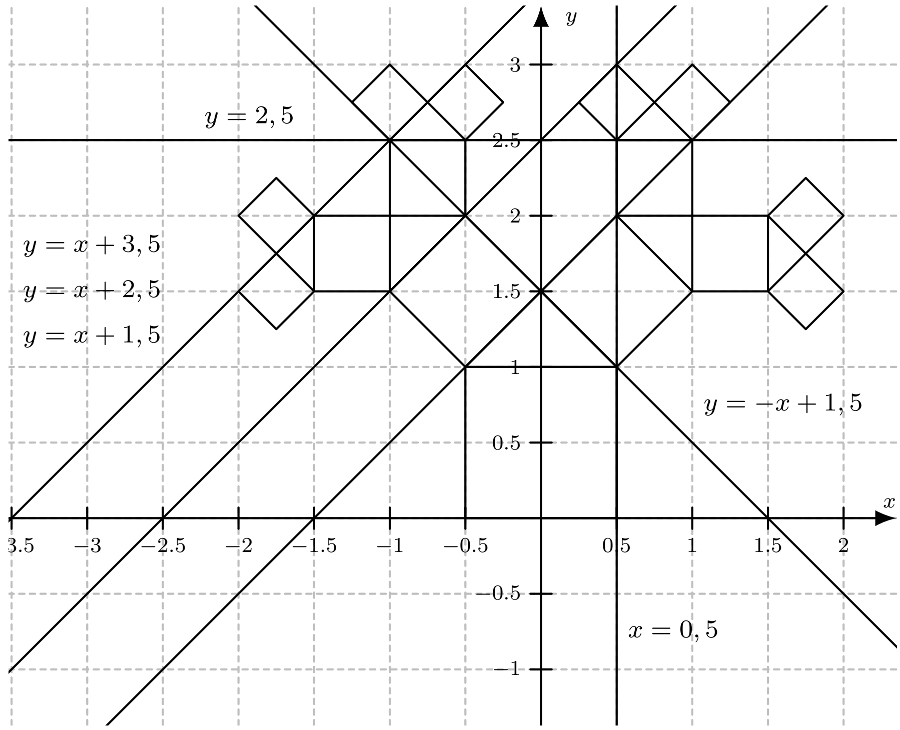


Abbildung 4.4: Koordinatengeometrie

in diesem Fall gleich. Gleichermaßen kann an dem Pythagorasbaum beobachtet werden, dass die Steigungen orthogonaler Geraden sich in diesem Beispiel nur durch das Vorzeichnen unterscheiden.[3] Die Zeichnung bietet außerdem Beispiele für Geraden, die zu den x- und y-Achsen parallel verlaufen. Es ist denkbar, den Pythagorasbaum so in ein Koordinatensystem zu zeichnen, dass in den beschreibenden Gleichungen keine irrationalen Zahlen vorkommen. Dies erlaubt den Einsatz der Aufgabenstellungen schon ab der 7. bzw. 8. Klasse.

Abbildungen und Symmetrien (7+)

Mit Hilfe des Koordinatensystems lassen sich, wie bereits gezeigt, geometrische Zusammenhänge zwischen Figuren oder auch Bewegungen dieser Figuren mit Hilfe von Zahlenpaaren und Gleichungen darstellen (siehe Abb. 4.4). Die Untersuchungen derartiger Beziehungen können durch folgende Fragen geleitet werden: Welche Symmetrien liegen vor? Wie verhalten sich dabei die Koordinaten der Punkte? Wie verändern sich die Koordinaten von Punkten durch Spiegelungen an den Koordinatenachsen, Verschiebungen längs der Koordinatenachsen, Drehungen um den Koordinatenursprung? Wie verändern

[3] Im Allgemeinen handelt es sich bei Steigungen von orthogonalen Geraden um Kehrwerte mit den entgegengesetzten Vorzeichen.

sich dabei die entsprechenden Gleichungen? Auf diese Weise werden einerseits Elemente der Analytischen Geometrie, andererseits für das Zeichnen von Funktionsgraphen erforderliche Kenntnisse über den Zusammenhang der Graphenlage und der Koeffizienten der entsprechenden Gleichungen vorbereitet.[4]

Negative Zahlen (7+)

Durch Lagebeziehungen und Bewegungen von ebenen geometrischen Figuren im Koordinatensystem (siehe Abb. 4.4) kann die Einführung von negativen Zahlen motiviert werden, und es wird möglich, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit ihnen zu veranschaulichen. So führen beispielsweise Spiegelungen von Figuren an der x-Achse zur Vorzeichenänderung der y-Koordinaten der Eckpunkte der Figur, wenn die Punkte nicht auf der x-Achse liegen. Dementsprechend wechseln die Vorzeichen der x-Koordinaten durch Spiegelungen der Figuren an der y-Achse. Durch Kombinationen von Spiegelungen an den Koordinatenachsen und Verschiebungen längs der Koordinatenachsen lassen sich die Addition und Subtraktion ganzer Zahlen veranschaulichen. Multiplikation und Division können durch Kombination von Spiegelungen mit Stauchungen bzw. Streckungen dargestellt werden.

Die Veranschaulichung von ganzen Zahlen durch Bewegungen von Punkten, Strecken und Figuren im Koordinatensystem leistet einen Beitrag zur Vorbereitung des Vektorbegriffs. Dabei stehen die einzelnen Bewegungen für Vektoren. Stauchungen und Streckungen stehen für eine Multiplikation mit einem Skalar.

Irrationale Zahlen (9+)

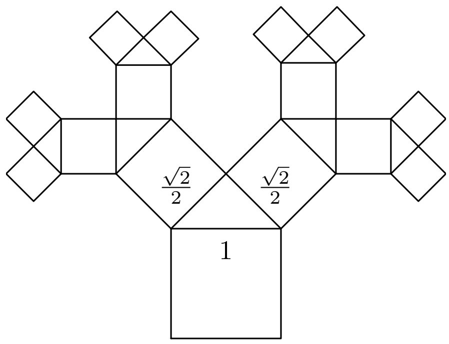


Abbildung 4.5: Irrationale Zahlen

In Anknüpfung an die von Winter (1989, 81) für den Satz des Pythagoras genannten inhaltlichen Bezüge ist es möglich mit Hilfe des Pythagorasbaumes irrationale Zahlen als Ähnlichkeitsfaktoren der Strecken in den Teilfiguren zu motivieren (siehe Abb. 4.5). Bei der Berechnung der Seitenlängen der Teilfiguren oder des Umfangs der Gesamtfigur kommen ebenfalls irrationale Zahlen vor. Diese können durch Streckenlängen bzw. ihre Verhältnisse veranschaulicht und mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

[4] Durch die Selbstähnlichkeit wäre es möglich, auch Streckungen und Stauchungen der Graphen einzubeziehen. Dies ist jedoch erst ab der 9. Klasse zu empfehlen.

Ebene Geometrie (7+)

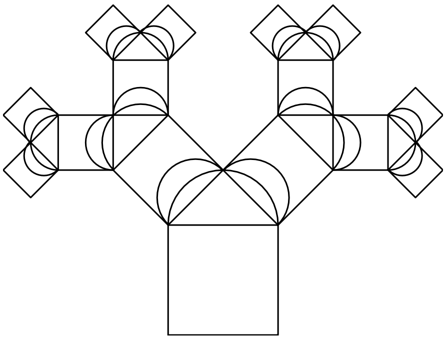


Abbildung 4.6: Hippokrates-Möndchen 1

Untersuchungen des symmetrischen Pythagorasbaumes können zur Entdeckung der Gleichschenkligkeit von Dreiecken und Größengleichheit der Basiswinkel führen. Daraus kann geschlussfolgert werden, dass die Größen der Basiswinkel jeweils 45° beitragen. Der Gegenstand weiterer Untersuchungen kann Fragen nach der Parallelität und Orthogonalität von Teilstrecken bzw. Fragen der Kongruenz von Teilfiguren einschließen. Dabei sind Sätze an geschnittenen Parallelen und Kongruenzsätze für Dreiecke sowie Kenntnisse über Höhe, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende und Seitenhalbierende anzuwenden.

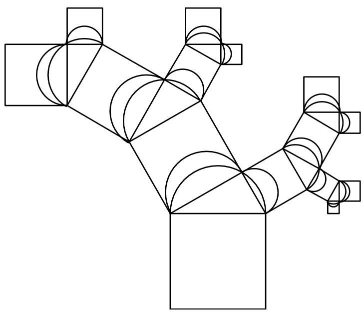


Abbildung 4.7: Hippokrates-Möndchen 2

Durch die Einbeziehung der Kreisthematik treten neue geometrische Objekte auf, an denen bekannte Gesetzmäßigkeiten sichtbar werden. Sinnvoll sind beispielsweise Untersuchungen der Eigenschaften der Um- und Inkreise von rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecken. Durch Überschneidung der Umkreise entstehen sogenannte Hippokrates-Möndchen (siehe Abb. 4.6). Die Summe der Flächeninhalte der zugehörigen Möndchen entspricht dem Flächeninhalt eines umschriebenen rechtwinkligen Dreiecks. Die Umkreise sind gleichzeitig Thales-Kreise. Werden die Scheitelpunkte der rechten Winkel der Dreiecke bewegt, so verwandeln sich gleichschenklige Dreiecke in nicht-gleichschenklige. Aufgrund des Satzes des Thales bleiben diese Dreiecke rechtwinklig. In den rechtwinkligen Dreiecken gilt der Satz des Pythagoras, deshalb bleiben die Summen der Flächeninhalte der Quadrate auf jeder Stufe gleich (siehe Abb. 4.7).

Da der Satz des Pythagoras beispielsweise in Berlin erst in der 9. Klasse eingeführt wird, lässt sich die Flächeninhaltsgleichheit durch Zerlegen der Gesamtfigur in kongruente Dreiecke begründen. Dass es sich hierbei um kongruente Dreiecke und Quadrate handelt, kann entweder in der Aufgabenstellung angegeben oder durch Nachmessen verifiziert werden. Symmetrieüberlegungen erweitern hier die Begründungsmöglichkeiten.

Die Berechnung der Flächeninhalte der Gesamtfigur, der vieleckigen Teilfiguren, der Thales-Kreise und der Hippokrates-Möndchen des Pythagorasbaumes ist auf der Grundlage geometrischer Kenntnisse möglich. Unter der Annahme, dass die Seitenlänge des Stammquadrates rational ist, besitzen fast alle oben genannten Figuren rationale Flächeninhalte.[5] Anders verhält es sich mit den Umfängen der Teilfiguren und der Gesamtfigur, denn hier (wie bereits im Zusammenhang mit der Einführung von irrationalen Zahlen angesprochen) kommen irrationale Streckenlängen als Ergebnisse vor.

Geometrie (9+)

Aufgrund der Parallelität der ausgewählten Strecken ist es möglich, in die Zeichnung des Pythagorasbaumes Strahlensatzfiguren einzuzeichnen und Ähnlichkeitssätze mit einzubeziehen. Als eine selbstähnliche Figur liefert der Pythagorasbaum viele verschiedene ähnliche Teilfiguren, an denen Ähnlichkeitsfaktoren untersucht werden können. Der Ähnlichkeitsfaktor der Strecken von der n. zur $n+1$. Stufe beträgt $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Der Ähnlichkeitsfaktor der Teilfiguren aus der n. und der $n+2$. Stufe beträgt $\frac{1}{2}$. Dies wird durch den Satz des Pythagoras nachgewiesen (siehe Abb. 4.5).

Beim Übergang ins Dreidimensionale kann die Selbstähnlichkeit des Pythagorasbaumes nicht mehr beibehalten werden. Dennoch kann der Baum beispielsweise als Grundriss einer geometrischen Figur interpretiert und untersucht werden. Die Erweiterung auf den dreidimensionalen Raum kann mit Hilfe von außermathematischen Modellierungen (z.B. *Broccoli*) oder gar Einkleidungen (z.B. *Bilder von Jos de Mey*, siehe Abb. 4.8)[6] unterstützt werden.

Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken (9+)

Durch Seitenverhältnisse in rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecken, die untereinander ähnlich sind, kann bewiesen werden, dass $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\tan 45° = 1$ gilt (siehe Abb. 4.5).

Zuordnungen und Funktionen (7+)

Der Kontext des Pythagorasbaumes bietet verschiedene Möglichkeiten, geometrische Zusammenhänge mit Hilfe von Funktionen (Proportionalität, Antiproportionalität, Lineare Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen) zu untersuchen (vgl. 4.1.2). So lassen sich beispielsweise Seitenverhältnisse in Dreiecken bzw. Verhältnisse von Streckenlängen und Flächeninhalten ähnlicher Figuren als Beispiele

[5] Eine Ausnahme bilden lediglich die Thales-Kreise. Vor allem im Fall der Hippokrates-Möndchen ist bemerkenswert, dass deren Flächeninhalte rational sind. Denn hierbei handelt es sich um eine wichtige Entdeckung in der Geschichte der Mathematik, nämlich dass Flächen, die durch nicht-gerade Linien begrenzt sind, rationale Flächeninhalte haben können.

[6] Dieses und weitere Bilder von Jos de Mey, die den Pythagorasbaum als Konstruktionsprinzip haben, sind unter ImpossibleWorld/http://im-possible.info/english/art/mey/mey7.html[3.12.12] zu finden.

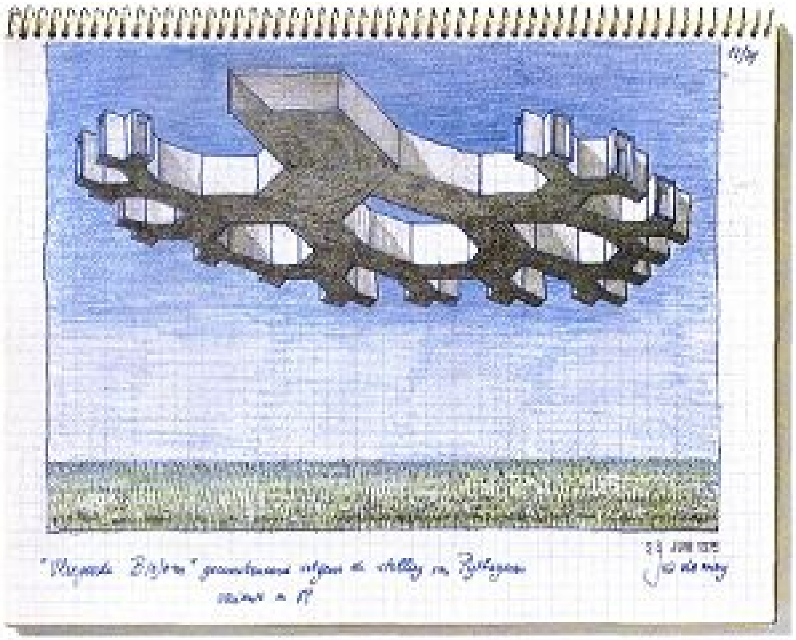


Abbildung 4.8: Fliegender Pythagorasbaum von Jos de Mey

für *proportionale Zuordnungen* oder *proportionale Funktionen* schon ab der 7. Klasse im Unterricht thematisieren.

Durch die Variation der Seitenlänge des Stammquadrates, der Winkelgrößen in den rechtwinkligen Dreiecken und der Stufenanzahl des Baumes kann die Frage nach dem Flächeninhalt der Figur neu aufgeworfen werden. So gilt für den gesamten Flächeninhalt des Pythagorasbaumes folgende Formel[7]:

$$A_{gesamt} = a^2(1 + n + \tfrac{n}{4}\sin 2\alpha).$$

Dabei stehen a für die Seitenlänge des Quadrates, n für die Stufenanzahl und α für die Größe eines der Winkel, die keine rechte Winkel sind.[8] In Anlehnung an die Vorschläge von Lietzmann (vgl. 2.2.3) können hier zwei Größen festgehalten und eine variiert werden, um den Zusammenhang zwischen ihnen als funktionale Abhängigkeit zu untersuchen. Auf diese Weise ergeben sich Beispiele für verschiedene Funktionsarten, die in der Sekundarstufe I von Bedeutung sind:

- *Lineare Funktionen* (7+): Bei einen symmetrischen Baum mit einer festen Stammdicke $a = 1$ gilt für den Flächeninhalt des gesamten Baumes folgende Gleichung: $n \to A(n) = 1 + \frac{5n}{4}, n \in N$, weil $\alpha = 45°$ und $\sin 90° = 1$ gilt.

[7] $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

[8] Da $\sin\alpha = \sin(90° - \alpha)$, ist es an dieser Stelle nicht wichtig, welcher der beiden Winkel betrachtet wird.

- *Quadratische Funktionen* (9+): Bei einem dreistufigen symmetrischen Pythagorasbaum ($\alpha = 45°$, $n = 3$) besteht ein quadratischer Zusammenhang zwischen der Stammdicke a und dem gesamten Flächeninhalt: $a \to A(a) = \frac{19}{4}a^2, a \in R$. Als Umkehrfunktionen von quadratischen Funktionen können hier *Wurzelfunktionen* thematisiert werden.

- *Trigonometrische Funktionen* (10+): Trigonometrische Funktionen entstehen, wenn beispielsweise bei einem dreistufigen Pythagorasbaum ($n = 3$) mit der Stammdicke $a = 1$ der Zusammenhang zwischen der Winkelgröße und dem gesamten Flächeninhalt beschrieben wird: $\alpha \to A(\alpha) = 4 + \frac{3}{4}\sin 2\alpha, \quad \alpha \in [0°, 90°]$.

- *Exponential- und Logarithmusfunktionen* (10+): Wird z.B. der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Stufen und dem Flächeninhalt A_{min} des kleinsten Quadrates bei einer festen Stammdicke ($\alpha = 45°$, $a = 1$) untersucht, so kann er mit Hilfe von *Exponentialfunktionen* dargestellt werden: $n \to A_{min}(n) = (\frac{1}{2})^n, n \in N$. Als Umkehrfunktion dieser Funktion können *logarithmische Funktionen* im Kontext der Pythagorasbaumes angesprochen werden.

Da die Funktionsgleichungen nicht nur über die oben vorgestellte allgemeine Formel, sondern auch durch elementargeometrische Überlegungen hergeleitet werden können, können die Zusammenhänge bereits ab den in Klammern angegebenen Klassenstufen besprochen werden.

Grenzprozesse (9+)

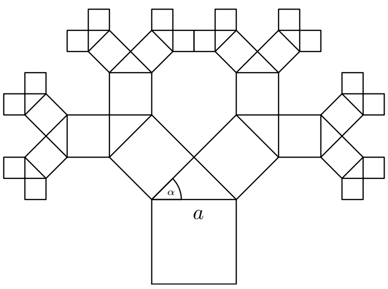


Abbildung 4.9: Grenzprozess

In der Abbildung 4.9 wurde der dreistufige Pythagorasbaum um weitere Stufen ergänzt. Der Prozess kann unendlich oft wiederholt werden. Dadurch ergibt sich ein Bezug zur fraktalen Geometrie. Dieser macht es möglich, exponentielles Wachstum und Grenzprozesse mit Hilfe des Pythagorasbaumes zu veranschaulichen und auf diese Weise Differenzial- und Integralrechnung vorzubereiten. So strebt beispielsweise der Flächeninhalt des kleinsten Quadrates eines symmetrischen Baumes mit der Stammdicke $a = 1$ bei unendlich vielen Stufen gegen Null: $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$. So wird hier die Idee von Kvasz von fraktaler Geometrie als Veranschaulichung von Grenzprozessen aufgegriffen (vgl. 3.5).

Wahrscheinlichkeiten (9+)

Für die Doppeljahrgangsstufen 7/8 und 9/10 der Sekundarstufe I werden in Berlin sogenannte thematische Pflichtfelder formuliert. Diese Pflichtfelder sollen nach Möglichkeit innermathematisch vernetzt werden. So wird beispielsweise empfohlen, das Pflichtfeld „Längen und Flächen bestimmen und berechnen (P2-9/10)“ mit den Pflichtfeldern „Mit dem Zufall rechnen (P8-7/8)“ und „Mit Wahrscheinlichkeiten rechnen (P8-9/10)“ zu verknüpfen. Es wird allerdings kein Hinweis darauf gegeben, wie dies im Unterricht geschehen kann. Somit wird das reichhaltige Potenzial für die Vernetzung von Inhalten aus der Stochastik mit anderen Bereichen nicht konkretisiert und bei weitem nicht ausgeschöpft. Dabei besteht das Potenzial der stochastischen Inhalte nach Engel (2007, 4ff.) gerade darin, dass sie neue Zugänge zu bereits bekannten Problemen bieten und so traditionelle Unterrichtsinhalte stützen könnten.

In Analogie zur Veranschaulichung von arithmetischen Konzepten (z.B. Brüchen) bzw. algebraischen Konzepten (z.B. Termen) kann auch nach einer geometrischen Veranschaulichung von Ergebnismengen in Zufallsexperimenten bzw. Wahrscheinlichkeiten gesucht werden. So können beispielsweise Pythagorasbäume als Alternative zu Baumdiagrammen mögliche Ausgänge eines mehrstufigen Zufallsexperiments darstellen.

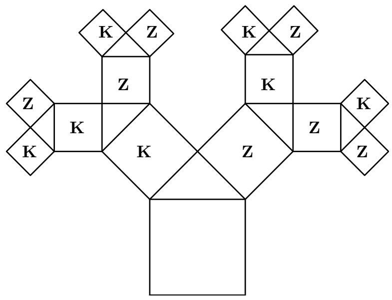


Abbildung 4.10: Münzwurf

In Abbildung 4.10 wird ein dreimaliger Münzwurf durch einen symmetrischen Pythagorasbaum veranschaulicht. In Ergänzung mit der Abbildung 4.3 können mit Hilfe des Pythagorasbaumes nicht nur Ergebnisse, sondern auch Wahrscheinlichkeiten dargestellt werden. Die Wahrscheinlichkeiten, „Kopf“ oder „Zahl“ in einem einmaligen Wurf zu werfen, sind gleich und betragen jeweils $\frac{1}{2}$, d.h. die entsprechenden Kathetenquadrate müssen bei der Veranschaulichung gleich groß sein. Dies ist dann der Fall, wenn das zugrunde liegende rechtwinklige Dreieck gleichschenklig ist.

Fällt beim ersten Wurf „Kopf“ und wird die Münze nochmals geworfen, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, im zweiten Wurf ebenfalls einen „Kopf“ zu erzielen, $\frac{1}{2}$. Diese Wahrscheinlichkeit wird durch den Flächeninhalt des Quadrates in der 2. Stufe veranschaulicht. Die vier Quadrate der 2. Stufe des Pythagorasbaumes haben den gleichen Flächeninhalt, der jeweils ein viertel des Flächeninhalts des Stammes ist. Diese Quadrate veranschaulichen Wahrscheinlichkeiten für die vier mögliche Ausgänge eines zweimaligen Münzwurfes. Die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ergebnisse „Kopf, Kopf“, „Kop, Zahl“, „Zahl, Kopf“, „Zahl, Zahl“ betragen jeweils $\frac{1}{4}$. Bei dem dreimaligen Werfen einer

Münze sind folgende acht Ergebnisse möglich: „Kopf, Kopf, Kopf“, „Kopf, Kopf, Zahl“, „Kopf, Zahl, Kopf“, „Kopf, Zahl, Zahl“, „Zahl, Kopf, Kopf“, „Zahl, Kopf, Zahl“,„Zahl, Zahl, Kopf“, „Zahl, Zahl, Kopf“. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten betragen jeweils $\frac{1}{8}$ und werden durch Quadrate in der 3. Stufe des Pythagorasbaumes dargestellt. Die Dreiecke, die der Konstruktion zugrunde liegen, müssen wiederum rechtwinklig sein, um diese Wahrscheinlichkeiten zu visualisieren. Auf den folgenden Stufen werden die Wahrscheinlichkeiten jeweils erneut halbiert. Die dem zeitlichen Ablauf entsprechende Leserichtung des Pythagorasbaumes ist von unten nach oben. Für die Darstellung eines Versuchs in den höheren Stufen steht – wie am Anfang – ein Quadrat zur Verfügung. Mit jeder Stufe halbieren sich die Flächeninhalte der entstehenden Quadrate. Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate bleibt innerhalb einer Stufe gleich und ist 1 (vgl. Schönwald 1993, 23ff.).

Angenommen, der Flächeninhalt des Ausgangsquadrates beträgt 1 und steht für die Summe der Teilwahrscheinlichkeiten. Auf der nächsten Stufe werden die Wahrscheinlichkeiten auf zwei Ereignisse gleich verteilt. Auch der Flächeninhalt des Quadrates wird auf zwei flächeninhaltsgleiche Kathetenquadrate aufgeteilt. Auf der nächsten Stufe werden die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sowie Flächeninhalte noch einmal aufgeteilt. Das Gleiche passiert auf den nachfolgenden Stufen.

Die 1. Pfadregel (Multiplikationsregel) für durch Baumdiagramme dargestellte mehrstufige Zufallsexperimente kann so formuliert werden: *„Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses erhält man durch Multiplikation der Teilwahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, der zu dem Ergebnis gehört.“* Die in den Baumdiagrammen als Brüche entlang der Pfade auftretenden Wahrscheinlichkeiten beziehen sich auf verschiedene Ganze, und zwar auf die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse auf den jeweils vorangehenden Stufen des Experiments. Im Gegensatz dazu haben die entlang der Äste des Pythagorasbaumes durch Quadrate dargestellten Wahrscheinlichkeiten den Flächeninhalt des Stammquadrates als gemeinsame Bezugsröße. Ob die Veranschaulichung mit von Stufe zu Stufe kleiner werdenden Flächen der Quadrate das Verständnis der Pfadregel erleichtert, ist offen. Dennoch könnten Vergleiche von Baumdiagrammen und Pythagorasbäumen den Schülern tiefere Einblicke in die Zusammenhänge ermöglichen.

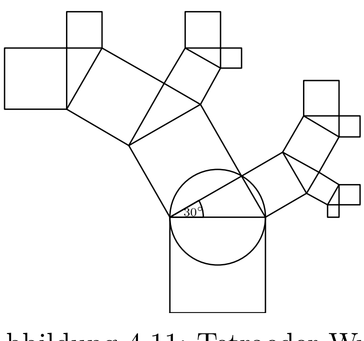


Abbildung 4.11: Tetraeder-Wurf

Analog könnte auch die 2. Pfadregel zur Addition der Pfadwahrscheinlichkeiten und die Addition der Flächeninhalte auf den entsprechenden Stufen des Baumes mit den Schülern besprochen werden. Sowohl die Summe der Wahrscheinlichkeiten wie auch die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate auf jeder

Stufe bleibt 1, wenn der Flächeninhalt des Ursprungsquadrates 1 beträgt. So können Elemente der Stochastik mit anspruchsvollen geometrischen Fragestellungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I deduktiv im Sinne von Brinkmann verknüpft werden (vgl. 2.3.1).

Der nicht-symmetrische Pythagorasbaum bietet Anknüpfungspunkte an andere Zufallsexperimente. So stellt beispielsweise Abb. 4.11 einen Pythagorasbaum zu einem Experiment dar, in dem ein Tetraeder drei Mal hintereinander gewürfelt wird. Ist ein Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck 30° groß, so ist die Hypotenuse dieses Dreiecks doppelt so lang wie seine kürzeste Kathete. Demzufolge beträgt der Flächeninhalt des entsprechenden Kathetenquadrates $\frac{1}{4}$ des Flächeninhaltes des Hypotenusenquadrates. Der Flächeninhalt des größeren Kathetenquadrates beträgt in diesem Fall $\frac{3}{4}$ des Flächeninhaltes des Hypotenusenquadrates. Auf der anderen Seite beträgt die Wahrscheinlichkeit, bei einem Tetraeder-Wurf eine „Eins" zu würfeln, $\frac{1}{4}$. Die Wahrscheinlichkeiten für das Gegenereignis beträgt demzufolge $\frac{3}{4}$ und wird mit dem kleineren Kathetenquadrat visualisiert.[9]

Die vorgestellten Ideen knüpfen an Vorschläge von Schönwald (1993, 23ff.) an, stochastische Experimente mit Hilfe von Fraktalen zu visualisieren. Im Einklang mit der Argumentation von Bea und Scholz (1995, 306ff.) zu Einheitsquadraten[10], bei denen Ergebnismengen durch Flächeninhalte repräsentiert werden, ist der große Vorteil derartiger Visualisierungen, dass nicht nur Ereignisse, sondern auch deren Wahrscheinlichkeiten durch Flächeninhalte „sichtbar" gemacht werden können. Aufgrund der Ähnlichkeit von Pythagorasbäumen und baumartigen Strukturen stellen sie darüber hinaus eine Art „Mittelweg" zwischen Fraktalen und Baumdiagrammen dar.

Statistik

x	-2	-1.75	-1.5	-1.25	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
$H(x_i)$	2	3	2	1	4	1	5	1	1	1	5	1	4	1	2	3	2
$h(x_i)$	$\frac{2}{39}$	$\frac{3}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{5}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{5}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{3}{39}$	$\frac{2}{39}$

y	0	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75	3
$H(y_i)$	2	2	2	7	2	8	2	4	6	4
$h(y_i)$	$\frac{2}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{7}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{6}{39}$	$\frac{4}{39}$

Abbildung 4.12: Koordinaten als Datensätze

Neben Schätzungen von Längen oder Flächeninhalten der Bestandteile des Pythagorasbaumes und davon abgeleiteter Figuren lassen sich Koordinaten der Eckpunkte

[9] Analog können Pythagorasbäume für Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder konstruiert werden. Insbesondere bei den platonischen Körpern mit vielen Flächen empfiehlt sich dabei, mit *GeoGebra* zu arbeiten.

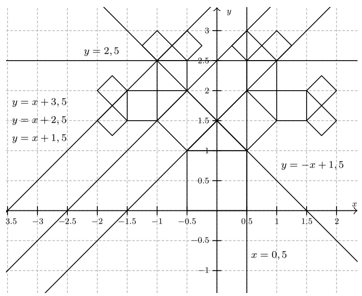
[10] Siehe auch Eichler und Vogel (2009, 211).

der Teilfiguren als statistische Datensätze interpretieren und untersuchen. So können beispielsweise für den in einem Koordinatensystem (wie in der Abb. 4.4) eingezeichneten Pythagorasbaum entsprechende Listen gebildet werden (siehe Abb. 4.12). Ausgehend davon lassen sich unterschiedliche Mittelwerte und lineare Abweichungen vom arithmetischen Mittelwert für die x- und für die y-Koordinaten bestimmen und vergleichen. Entsprechende lineare Abweichungen von den arithmetischen Mittelwerten lassen sich als Streckenlängen deuten und miteinander vergleichen. Sinnvoll sind dabei auch Überlegungen zu Symmetrieeigenschaften der Figur und ihre Auswirkungen auf die Kenngrößen der Datensätze. In der Abbildung 4.12 sind absolute Häufigkeiten $(H(x_i), H(y_i))$ und relative Häufigkeiten $(h(x_i), h(y_i))$ des Vorkommens der jeweiligen Koordinaten tabellarisch dokumentiert. Ausgehend von den Werten in der Tabelle kann mit Hilfe arithmetischer Mittelwerte der Koordinaten der Mittelpunkt des Baumes $M = (\bar{x}, \bar{y}) \approx (0, 1.99)$ bestimmt werden. Dementsprechend gilt für die mittleren linearen Abweichungen $(d_{\bar{x}}, d_{\bar{y}})$ von den arithmetischen Mittelwerten $d_{\bar{x}} \approx 1.08 > d_{\bar{y}} \approx 0.57$. Das bedeutet, dass die x-Koordinaten breiter als die y-Koordinaten gestreut sind, was auch an der Lage der Figur im Koordinatensystem erkennbar ist.

Nach dem Berliner Rahmenlehrplan sollen im Rahmen des Pflichtfeldes *P3 9/10 Aus statistischen Daten Schlüsse ziehen* Datensätze mit gleichem arithmetischen Mittel und unterschiedlicher mittlerer linearer Abweichung interpretiert werden (Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I. Mathematik. Berlin 2006, 46). Das beschriebene Beispiel erlaubt eine geometrische Interpretation der Unterschiede zweier Datensätze.

Mathematik *am* Pythagoras-Baum

Koordinatengeometrie



Negative Zahlen durch Koordinatensystem motivieren und veranschaulichen

Abbildungen und Symmetrien

- Welche Symmetrien liegen vor?
- Wie sehen dabei Koordinaten der Punkte aus?
- Wie verändern sich Koordinaten der Punkte durch
  ... Spiegelungen an den Koordinatenachsen?
  ... Verschiebungen längs Koordinatenachsen?
  ... Drehungen um Koordinatenursprung?
- Wie verändern sich dabei die Gleichungen?

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von negativen und positiven Zahlen durch Bewegungen im Koordinatensystem veranschaulichen

Statistik

- absolute Häufigkeiten des Vorkommens einer Koordinate ($H(x_i), H(y_i)$)
- relative Häufigkeiten des Vorkommens einer Koordinate ($h(x_i), h(y_i)$)

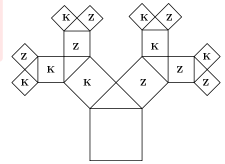
x	-2	-1.75	-1.5	-1.25	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
$H(x_i)$	2	3	2	1	4	1	5	1	1	1	5	1	4	1	2	3	2
$h(x_i)$	$\frac{2}{39}$	$\frac{3}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{5}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{5}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{3}{39}$	$\frac{2}{39}$

y	0	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75	3
$H(y_i)$	2	2	2	7	2	8	2	4	6	4
$h(y_i)$	$\frac{2}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{7}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{6}{39}$	$\frac{4}{39}$

- Mittelpunktskoordinaten als arithmetische Mittelwerte
- $M(Mittelpunkt) = (\bar{x}, \bar{y}) \approx (0, 1.99)$
- Mittlere lineare Abweichungen ($d_{\bar{x}}, d_{\bar{y}}$) als Streckenlängen
  $d_{\bar{x}} \approx 1.08 > d_{\bar{y}} \approx 0.57$

Zufall und Wahrscheinlichkeiten

Ergebnissmengen und Wahrscheinlichkeiten veranschaulichen durch
- Flächeninhalte und Verhältnisse zwischen ihnen
Pfadregeln und Bernoulli-Formel veranschaulichen
$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}$

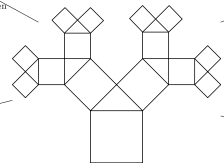


Punktkoordinaten als statistische Datensätze

stochastische Begriffe und Regeln visualisieren

geometrische Objekte mit Koordinaten beschreiben

geometrische Zusammenhänge mit Funktionen beschreiben



Zuordnungen und Funktionen

proportional: *Seitenverhältnisse in ähnlichen Teilfiguren*
Allgemeine Flächeninhaltsformel für n Stufen (siehe Bild unten)

$$A_{gesamt} = a^2 (1 + n + \frac{n}{4} \sin 2\alpha)$$

linear: *Anzahl der Stufen* $\rightarrow$ *Flächeninhalt* ($\alpha = 45°$, $a = 1$)

$$n \rightarrow A(n) = 1 + \frac{5n}{4}, \quad n \in N$$

quadratisch: *Seitenlänge des größten Quadrats* $\rightarrow$ *Flächeninhalt* ($\alpha = 45°$, $n = 3$)

$$a \rightarrow A(a) = \frac{19}{4} a^2, \quad a \in R$$

trigonometrisch: *Winkelgröße* $\rightarrow$ *Flächeninhalt* ($n = 3$, $a = 1$)

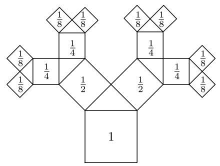
$$\alpha \rightarrow A(\alpha) = 4 + \frac{3}{4} \sin 2\alpha, \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

exponential: *Anzahl der Stufen* $\rightarrow$ *FI kleinsten Quadrates* ($\alpha = 45°$, $a = 1$)

$$n \rightarrow A_{kleinsterQuadrat}(n) = (\frac{1}{2})^n$$

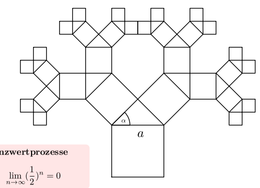
Brüche durch Flächeninhalte und Verhältnisse veranschaulichen

Zahlenbereiche und Rechenregeln visualisieren



Addition und Subtraktion von Brüchen (Flächeninhalte)
Multiplikation und Division von Brüchen (Verhältnisse von Flächeninhalten)

Wachstums- und Grenzwertprozesse visualisieren



Grenzwertprozesse

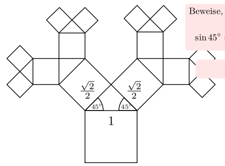
$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$$

Zahlenbereiche und Funktionswerte visualisieren

Kreise miteinbeziehen

ebene Objekte als räumliche interpretieren

Irrationale Zahlen durch Streckenlängen motivieren, veranschaulichen, konstruieren



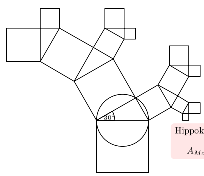
Beweise, dass

$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 45° = 1$

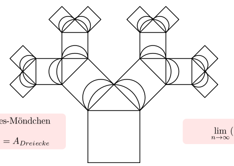
Ebene Geometrie

- besondere Dreiecke und Vierecke
- Winkelsätze an geschnittenen Parallelen
- Höhe, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte in gleichseitigen Dreiecken
- Kongruenzsätze für Dreiecke
- Satz des Thales
- Winkelsätze am Kreis
- Strahlensätze und Ähnlichkeit
- ...

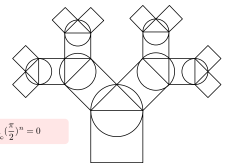


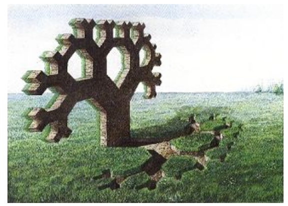
Hippokrates-Möndchen

$A_{Monde} = A_{Dreiecke}$



$$\lim_{n\to\infty} (\frac{\pi}{2})^n = 0$$





Einstiegs- und Initialaufgaben

Ausgehend von den vorangehend beschriebenen inhaltlichen Bezügen und im Hinblick auf die Lernvoraussetzungen der Erprobungsgruppen[11] wurden in Kooperation mit Lehrern eine Einstiegsaufgabe und mehrere Initialaufgaben entwickelt. Im Folgenden werden diese vorgestellt und kommentiert.

Aufgabe 1 *„Einstiegsaufgabe“*
Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild[12] auf. Welche mathematischen Begriffe und Sätze fallen Dir dazu ein?

Die Einstiegsaufgabe ist in Anlehnung an Gallin und Ruf (1998, 55ff.) als Einzelarbeitsauftrag formuliert, damit der einzelne Schüler sich zunächst auf seine Empfindungen, Erinnerungen und Ideen konzentrieren und ungestört seinen Gedanken und Assoziationen freien Lauf lassen kann. Dafür werden zunächst lediglich eine Zeichnung und die dazugehörige Frage ohne die Zusatzinformation angeboten.

Außer dem Konstruktionsprinzip der Figur lassen sich Symmetrien, flächeninhaltsgleiche, ähnliche und kongruente Figuren, gleichseitige rechtwinklige Dreiecke und vor allem die Beweisfigur des Satzes des Pythagoras für den symmetrischen Fall entdecken.[13]

Diese und andere in der Potenzialanalyse ausgeführten Bezüge können in späteren Phasen des Unterrichts vertieft werden.

Im Anschluss an eine erste Beschäftigung mit der Aufgabe und ihre kurze Auswertung werden den Schülern einige Informationen zum Pythagorasbaum gegeben (siehe Abb. 4.13).[14]

Einige Informationen zum Pythagorasbaum: Ein Pythagorasbaum entsteht, wenn man auf ein Quadrat (Stamm) ein rechtwinkliges Dreieck (Verzweigung) mit seiner Hypotenuse aufsetzt. An die Katheten schließen sich wieder Quadrate (Zweige) an, an deren gegenüberliegenden Seiten sich wiederum rechtwinklige Dreiecke befinden, die dem ersten Dreieck ähnlich sind usw. Alle entstehenden Verzweigungen enden mit Quadraten (Blättern).

Abbildung 4.13: Informationstext für Schüler

Initialaufgaben (9+)

Es empfiehlt es sich, aus den im Folgenden aufgeführten Angebot der Initialaufgaben zunächst fünf bis sieben Aufgaben auszuwählen, die nach Möglichkeit an die behandelten

[11] Alle Erprobungsgruppen werden in 4.1.2 tabellarisch dargestellt.
[12] Damit ist die Zeichnung des dreistufigen Pythagorasbaumes wie in der Abbildung 4.2 gemeint
[13] Die Figur enthält Quadrate, die quer zum Seitenformat stehen. Lambert (2006, 5) zufolge erkennen viele Schüler Quadrate in dieser Lage nicht.
[14] Der Einstieg kann ebenfalls mit den Bildern von Jos de Mey erfolgen (siehe beispielsweise Abb. 4.8).

Unterrichtsabschnitte anknüpfen. Für die Bearbeitung der Initialaufgaben kann die ganze Lerngruppe in fünf bis sieben *Expertengruppen*[15] aufgeteilt werden.

Aufgabe 2 *„Zahlen und Längen“* [16]

Untersucht, ob rationale Zahlen zur Beschreibung der vorkommenden Seitenlängen des Baumes ausreichen. Wie hängen die Längen zusammen? Begründet eure Vermutung.

Der Arbeitsauftrag bietet eine Alternative zur Motivation der Einführung der irrationalen Zahlen durch eine Diagonale in einem Einheitsquadrat. Sie verbindet rückblickend die Themenbereiche *Satz des Pythagoras* und *irrationale Zahlen*. Hier wird von den Schülern erwartet, dass sie zur Berechnung der Seitenlängen den Satz des Pythagoras anwenden und auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$ stoßen. Die Vernetzung von Geometrie und Algebra entsteht dabei durch Modellierung von reellen Zahlen durch Streckenlängen. Durch geometrische und algebraische Begründungen werden deduktive Vernetzungen hergestellt, aber auch Ansatzpunkte zu ihrer Reflexion geschaffen.

Aufgabe 3 *„Abhängigkeit“*

Wie könnt ihr die Abhängigkeit des Flächeninhalts bzw. des Umfangs der abgebildeten Figur von der Stammdicke mit Hilfe von Funktionen beschreiben? Benutzt dabei alle euch bekannten Darstellungen (Gleichung, Graph, Tabelle, mit Worten) von Funktionen. Welche Darstellungsformen passen besser zu der Aufgabe?

Geometrische Gesetzmäßigkeiten für den Flächeninhalt und den Umfang sollen zunächst erkannt und dann als Formeln algebraisiert werden. Ziel ist es, dass die Schüler erkennen, dass die Stammdicke linear mit dem Umfang und quadratisch mit dem Flächeninhalt zusammenhängt und den Zusammenhang zwischen den Dimensionen und den Funktionsgleichungen sowie ihrer graphischen Darstellung aufdecken.

Durch die Vorgabe von einzelnen konkreten Werten für verschiedene Stammdicken lässt sich die Aufgabe vereinfachen. Vernetzungen entstehen vor allem durch innermathematische Modellierungen und Wechsel der Darstellungsebenen.

Aufgabe 4 *„Ähnlichkeit“*

Welche ähnlichen Figuren entdeckt ihr auf dem Bild? Warum sind diese Figuren ähnlich zueinander? Bestimmt die Ähnlichkeitsfaktoren.

Es wird behauptet, dass Pythagorasbäume Broccoli ähnlich sind. Was denkt ihr über diese Aussage? Begründet eure Antwort.

[15] Die Schüler werden in der Bearbeitungsphase zu den Experten einer Initialaufgabe und können anschließend ihr „Expertenwissen“ ihren Mitschülern präsentieren bzw. bei der Kombination von eigenen Aufgaben einbringen.

[16] Die Namen der Initialaufgaben sind nicht immer an die inhaltlichen Bezüge gebunden und wurden von einem der Mathematiklehrer vorgeschlagen. Sie sollten die Schüler motivieren.

Ausgehend davon, dass es sich um gleichschenklige und rechtwinklige Dreiecke handelt, sollen die Schüler mit Hilfe der Strahlensätze oder Ähnlichkeitssätze begründen, dass es sich um ähnliche Dreiecke und Quadrate handelt. Sie können aber auch erkennen, dass die gesamte Figur in ähnliche Teilfiguren eingeteilt werden kann, die aus Quadraten und Dreiecken zusammengesetzt sind. Die entsprechenden Ähnlichkeitsfaktoren lassen sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras und der Strahlensätze bestimmen. Dabei sind irrationale Zahlen von Bedeutung. So kann es an dieser Stelle zu Modell- und deduktiven Vernetzungen kommen. Beim abschließenden Vergleich mit dem Broccoli sollen die Unterschiede zwischen dem mathematischen und einem alltäglichen Ähnlichkeitsbegriff herausgearbeitet werden.

Aufgabe 5 *„Broccoli“*

Es wird behauptet, dass Pythagorasbäume Broccoli ähneln. Modelliert einen Broccolikopf mit Hilfe von euch bekannten geometrischen Körpern. Überlegt euch eine Funktion, mit der man das Volumen eines Broccolikopfes in Abhängigkeit von dem Durchmesser seines Stammes beschreiben könnte.

Mit Hilfe des außermathematischen Bezugs des Broccolis soll auf der Grundlage des Pythagorasbaumes ein geometrischer Körper entworfen werden, der aus den Schülern bekannten Figuren (z.B. Prismen, Zylindern) besteht. Hierbei sollen Körper ausgewählt werden, die am besten zu dem Broccoli passen. Bei der Berechnung des Volumens des gesamten Körpers in Abhängigkeit von der Stammdicke tritt eine kubische Funktion auf. Auch diese Aufgabe bietet Möglichkeiten, den Unterschied zwischen dem mathematischen und alltäglichen Ähnlichkeitsbegriff zu thematisieren. Da es sich bei Broccoli um ein dreidimensionales Objekt und beim Pythagorasbaum um ein zweidimensionales Objekt handelt, können sie im mathematischen Sinne nicht ähnlich sein. Des Weiteren ist es nicht möglich, einen selbstähnlichen dreidimensionalen Pythagorasbaum zu konstruieren.

Aufgabe 6 *„Kreis“*

Untersucht die Umfänge und Flächeninhalte der Umkreise der eingezeichneten Dreiecke. Welche Gesetzmäßigkeiten könnt ihr dabei entdecken?

In dieser Aufgabe sollen die Schüler geometrische Zusammenhänge am Kreis als funktionale Abhängigkeiten des Kreisumfangs von dem Kreisradius beschreiben und untersuchen.

Aufgabe 7 *„Möndchen des Hippokrates“*

Durch Überschneidungen der Kreise über den Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks entstehen die „Möndchen des Hippokrates“. Zeichnet für alle Stufen der abgebildeten Figur die entsprechenden Möndchen. Wie kann man die Summe der Flächeninhalte aller gezeichneten Möndchen schnell berechnen?

Bei der Aufgabe werden Inhalte von geradlinigen und kreisförmigen Flächen miteinander in Beziehung gebracht. Da die Summe der Flächeninhalte der Möndchen des Hippokrates dem Flächeninhalt des Dreiecks entspricht, ist der Inhalt von gekrümmten Flächen und geradlinigen Flächen gleich.

Neben der Herleitung der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts der Pythagoras-Möndchen (als deduktive Vernetzung) sollen die Schüler entdecken, dass die Summe der Flächeninhalte der Umkreise bzw. der Thales-Kreise und der Hippokrates-Möndchen auf jeder Stufe gleich bleibt.

Aufgabe 8 *„Schätzen“*

Lasst eure Mitschüler und Lehrer den Flächeninhalt der gezeichneten Figur schätzen. Bestimmt den Modalwert, den Median, das arithmetische Mittel und die Spannweite eurer Stichprobe. Stellt die Ergebnisse in einem Boxplot dar. Berechnet den Flächeninhalt ausgehend von der mit einem Lineal gemessenen Stammdicke a. Vergleicht die Schätzungen mit dem berechneten Wert. Was fällt euch auf?

An dieser Stelle sollen die Schüler eine kleine Umfrage planen, durchführen und auswerten. Die ermittelten Daten sollen mit den analytisch bestimmten Werten verglichen und Unterschiede zwischen diesen interpretiert werden. So können Aussagen über die Güte der Schätzungen getroffen werden.

Beim Schätzen kann die Gleichheit der Flächeninhalte auf jeder Stufe herangezogen werden. Die Planung und Umsetzung der kleinen Umfrage kann unter den Gruppenteilnehmern aufgeteilt werden. Der Vergleich von verschiedenen statistischen Werten kann zur Reflexion der Bedeutung verschiedener statistischer Begriffe führen.

Der Vorteil dieser Aufgabe liegt darin, dass nicht nur statistische Begriffe thematisiert werden, sondern diese in einen geometrischen Kontext eingebettet sind. Darüber hinaus erhalten die Schüler hier eine Möglichkei,t Flächeninhalte zu schätzen.

Aufgabe 9 *„Baumdiagramme“*

In der Abbildung wird ein dreimaliger Münzwurf mit einem Pythagorasbaum veranschaulicht. Die dem zeitlichen Ablauf entsprechende Leserichtung ist von unten nach oben. Für die Darstellung eines Versuchs in den höheren Stufen steht wie am Anfang ein Quadrat zur Verfügung. Mit jeder Stufe halbiert sich der Flächeninhalt der entstehenden Quadrate. Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate bleibt innerhalb einer Stufe gleich. Wie kann man einen dreimaligen Münzwurf mit der gezeichneten Figur veranschaulichen? Welche Vor- bzw. Nachteile hat diese Darstellungsmöglichkeit im Vergleich zu Baumdiagrammen?

Mit dieser Aufgabe wird der Pythagorasbaum als eine Alternative zum Baumdiagramm, falls die Schüler Baumdiagramme schon kennen, eingeführt. Kennen die Schüler

Baumdiagramme noch nicht, so lernen sie den Pythagorasbaum als eine Möglichkeit kennen, Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten in mehrstufigen Zufallsexperimenten mit zwei Ausgängen darzustellen.

Initialaufgaben (10+)

Weitere Initialaufgaben wurden für die gleiche Lerngruppe in dem darauf folgenden Schuljahr entwickelt und erprobt.

Aufgabe 10 *„Umfang“*

Wie könnte man Umfänge nicht-symmetrischer Pythagorasbäume berechnen, wenn die Stammdicke, die Anzahl der Stufen und ein Basiswinkel in dem größten rechtwinkligen Dreieck bekannt sind? Stellt eine allgemeine Formel auf.

Diese Aufgabe ist eine Variation der Aufgabe „Abhängigkeit“, in der eine allgemeine Formel für die Berechnung des Umfangs hergeleitet werden sollte. Die inhaltliche Anforderung der Aufgabe steigt durch das Heranziehen nicht-symmetrischer Fälle und das Auftreten von Winkelgrößen als neuen Variablen. Außerdem wird hier die Stufenanzahl nur allgemein angegeben. Die Aufgabe verbindet Algebra und Geometrie vor allem durch Trigonometrie.

Aufgabe 11 *„Flächeninhalt“*

Für den Flächeninhalt nicht-symmetrischer Pythagorasbäume gilt folgende Formel: $A_{gesamt} = a^2(1 + n + \frac{n}{4} \sin\alpha \cos\alpha)$. *Überzeugt euch, dass die Formel stimmt.*

Hinweis: Dabei stehen a für die Stammdicke, n für die Anzahl der Stufen und α für einen der Winkel.

Zusatz: Stellt spezielle Formeln für Pythagorasbäume mit den Basiswinkeln $30°$, $45°$, $60°$ *auf. Was fällt euch auf? Wie könnt ihr das erklären?*

In dieser Aufgabe geht es wie in der vorangehenden um eine Variation der Aufgabe „Abhängigkeit“. Trigonometrie ist auch an dieser Stelle von Bedeutung, wobei die Aufgabe dadurch erleichtert wird, dass die Formel vorgegeben ist und hergeleitet werden soll. Die konkreten Werte sollen die Herleitung erleichtern.

Aufgabe 12 *„Fortsetzung“*

Man kann den symmetrischen Pythagorasbaum beliebig oft fortsetzen. Welche Funktion beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt eines Blattes und der zugehörigen Stufenanzahl? Wie oft muss man den symmetrischen Pythagorasbaum ausgehend von dem Stamm fortsetzen, damit der Flächeninhalt eines Blattes nur noch $\frac{1}{128}$ *des Flächeninhalts des Stammes beträgt? Ermittelt die Stufenanzahl eines Pythagorasbaumes, der über eine Million Blätter hat.*

Die erste Frage zielt auf die Beschreibung von geometrischen Zusammenhängen mit Hilfe von Exponentialfunktionen. Die nächste Frage kann mittels von Logarithmen, aber auch durch Probieren beantwortet werden, weil es sich hier um Potenzen der Zahl 2 handelt. Die Figur veranschaulicht exponentielles Wachstum.

4.1.2 Erprobungen in der Schule und in der Universität

Im Folgenden werden ausgewählte Ergebnisse aus den Erprobungen des Aufgabennetzes (die in der Tabelle[17] zusammengefasst sind) vorgestellt und ausgewertet. Bei der Erprobung wurde nicht standardisiert, sondern im Sinne praxisbezogener methodischer Zugänge offen vorgegangen (vgl. Macke 1990, 65, Tenorth 2006b, 580ff., Wittmann 1995, 365ff.). Das in 1.5 begründete Vorgehen sollte durch die Offenheit der Herangehensweise einerseits tiefere Einblicke in die Komplexität der sich in praktischen Lernsituationen manifestierenden Beziehungshaltigkeit der Schulmathematik erlauben, andererseits durch Erprobungen von Aufgabennetzen keine unangemessenen zusätzlichen Schwierigkeiten im Arbeitsalltag der Schüler und Lehrer verursachen.

Schule/Universität	**Stufe**	Jahr
MSG (Berlin)	8. Klasse	2009
Lehramtsstudierende (Berlin)	1.-3. Semester	2009
Gymnasium (Aachen)	9. Klasse	2009
Gymnasium (Berlin)	9. Klasse	2009
Gymnasium (Berlin)	10. Klasse	2010
Lehramtsstudierende (Berlin)	1.-3. Semester	2010

Für die Darstellung der Erprobungen wurden einzelne illustrierende Fragmente ausgewählt. Sie sollen andeuten, was man beim Einsatz der Aufgabennetze als Lehrer an Ergebnissen erhoffen darf. Bei der ersten Erprobung des Aufgabenetzes „Pythagorasbaum“ habe ich selbst unterrichtet und beobachtet. Demnach gründet sich die entsprechende Darstellung auf eigene Dokumentationen.

Erprobung in der MSG (Berlin) 2009

Die Initialaufgaben für die 9. Klasse wurden zunächst mit Schülern einer 8. Klasse der MSG erprobt. Die Erprobung in einer Gruppe besonders interessierter und begabter Schüler sollte erste Überarbeitungshinweise für die Aufgaben geben, aber auch Ideen zu

[17] Die Abkürzung MSG in der Tabelle steht für Mathematische Schülergesellschaft „Leonard Euler“ an der Humboldt Universität zu Berlin.

ihrer Weiterentwicklung.[18] Sie erstreckte sich über zwei Doppelstunden. Im Folgenden werden ausgewählte Fragmente daraus vorgestellt.

Bearbeitung der Einstiegsaufgabe: Bei der Bearbeitung der Einstiegsaufgabe (siehe S. 142) erwähnten alle Schüler[19] bis auf Lena und Anton den Satz des Pythagoras. Die Beschreibungen des Pythagorasbaumes variierten zwischen Stichpunkten und ausformulierten Texten. Die Fachbegriffe (z.B. Kathete, Hypotenuse, Lot, Höhe) wurden von den Schülern richtig verwendet. Drei Schüler versuchten, die Figur zu skizzieren. Ein Schüler erweiterte dabei den Pythagorasbaum um zusätzliche Stufen. Ein anderer versuchte das Ausgangsquadrat nicht mit einem, sondern mit vier Dreiecken zu versehen. Leider verwendete er dabei nicht rechtwinklige und gleichschenklige, sondern gleichseitige Dreiecke, was zu Überlappungen führte und den Schüler daran hinderte, die Idee weiter zu verfolgen. Mehr als die Hälfte der Schüler bemerkte die Achsensymmetrie. Damian und Daniel entdeckten ähnliche Dreiecke und bestimmten korrekt den entsprechenden Streckungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Katja stellte sich bereits beim Einstieg eine eigene geometrische Frage: Wie sieht das Bild aus, wenn man es immer weiter fortführt? Diese Frage bearbeitete sie in der nächsten Unterrichtsphase. Zwei Schüler assoziierten die Figur mit Netzen geometrischer Körper.

Irrationale Zahlen (Daniel und Damian) und Periodizität[20] (Than) fielen den Schülern als weitere Themenbereiche auf. Than vermutete, dass die Zeichnung zu einer Aufgabe erstellt wurde, in der Flächeninhalte von Vierecken und Dreiecken zu bestimmen wären. Konstantin versuchte eine Formel zu finden, nach der die Anzahl der Dreiecke in einem Pythagorasbaum berechnet werden könnte.

Bemerkenswert sind Beiträge von Alex, Anton und Lena, die über die Grenzen der Mathematik hinausgingen. Alex assoziierte die Zeichnung mit den Wörtern (*Baum*, *Unendlichkeit*, *Ähnlichkeit*, *Ruhe und Unruhe*, *Ausbreitung eines Gerüchts*, *logische Abfolge*, *Gesellschaft*, *Freunde und Feinde*, *Pythagoras*, *Sechseck*). Er skizzierte den Baum und zeichnete weitere Stufen hinzu. Lena und Anton assoziierten die Zeichnung mit abstrakter Kunst oder einer unwirklichen Figur. Die Zeichnung erinnerte Alex und Lena an einen Stammbaum.

Lösen von Initialaufgaben: Beim Lösen von Aufgaben konnten sich die Schüler aussuchen, ob sie allein oder in Paaren arbeiten. Lukas und Daniel arbeiteten allein. Den Schülern gelang es, die Präsentation und die Auswertung der Aufgaben in der ersten Doppelstunde erfolgreich abzuschließen.[21]

[18] Veranstaltungen für mathematisch begabte Schüler wählte auch Kießwetter, um seine Materialien für Vernetzung im Mathematikunterricht zu entwickeln (vgl. 2.3.1).

[19] Die Namen der Schüler wurden geändert.

[20] An dieser Stelle wurde eine mögliche Verknüpfung mit trigonometrischen Funktionen angedeutet.

[21] Da es sich hier um Schüler mit besonderen Lernvoraussetzungen handelt und die Aufgabennetze in regulären Schulklassen einsetzbar sein sollen, wird diese Phase der Erprobung nicht näher beleuchtet.

Da die von den MSG-Schülern entwickelten Aufgaben bei den weiteren Erprobungen eingesetzt wurden, werden sie im Folgenden vorgestellt. Beim Entwickeln von eigenen Aufgaben durften sich die Schüler wieder aussuchen, ob sie allein oder in Gruppen arbeiten. An den Formulierungen der Vorschläge lässt sich erkennen, für welche Arbeitsform sie sich entschieden hatten.

Aufgabe 13 *„Würfeln“*

Alex, Janek und Konstantin beschäftigen sich mit der folgenden Frage: Wirft man einen Spielwürfel viermal hintereinander und fragt sich, wie oft die Zahl sechs vorkommt, so kann man das Experiment nicht mehr mit einem symmetrischen Pythagorasbaum darstellen. Wie würde der Pythagorasbaum aussehen, der zu diesem Experiment passen würde? Lässt sich das Modell auf andere Bernoulli-Experimente übertragen? Überlegt euch eigene Beispiele.

Um die Aufgabe zu lösen, bewegten die Schüler den Scheitelpunkt des rechten Winkels entlang des Thales-Kreises so, dass die Flächeninhalte der Quadrate über die Hypotenuse im Verhältnis 1 : 6 standen. Sie ergänzten den Baum um eine weitere Stufe und erklärten, wie weitere mehrstufige Experimente mit zwei Ausgängen mit Hilfe des nicht-symmetrischen Pythagorasbaumes dargestellt werden können.

Aufgabe 14 *„Überschneidung der Äste“*

Anna, Than und Katja untersuchen, wann die Äste der Pythagorasbäume sich überschneiden. Welche Ergebnisse sind zu erwarten?

Die Schülerinnen zeichneten den Baum weiter und berechneten die Längen der weiteren Strecken mit Hilfe des Satzes des Pythagoras. Sie stellten fest, dass sich die Quadrate in der 5. Stufe berühren und danach überschneiden. Da die Schülerinnen ihre Lösung mit einer Zeichnung ausstatteten, konnten sie zeigen, dass die bei der Berührung der Äste entstehende Öffnung die Form eines Fünfecks und nicht, wie von Alex vermutet, eines Sechsecks hatte (siehe Abb. 4.9).

Aufgabe 15 *„Lunge“*

Alex hat vorgeschlagen, mit Hilfe des Pythagorasbaumes eine menschliche Lunge zu modellieren. Dabei ging er davon aus, dass die Lunge und Broccoli ähnlich sind. Wie gut entspricht das Modell dem Original?

Der Schüler argumentierte über die äußere Ähnlichkeit von Pythagorasbäumen und Lungen, bis er in der Diskussion feststellte, dass es bei Lungen um eine möglichst große Oberfläche in einem kleinen Raum geht. Dies erklärt sich dadurch, dass der Gasaustausch im Organismus durch eine möglichst große Fläche der Lunge begünstigt wird. Im

Gegensatz dazu ist die Größe des menschlichen Körpers begrenzt. Das Lungen-Modell von Alex führte mit der wachsenden Anzahl von Stufen sowohl zu einem unendlich wachsenden Volumen wie auch einem unendlich wachsenden Flächeninhalt. Deshalb versuchte er mit Hilfe von anderen Gebilden, die er sich selbst ausgedacht hatte, ein anderes Modell zu finden. An dieser Stelle war es möglich, mit Hilfe eines außermathematischen Bezugs der Lunge Grenzprozesse propädeutisch zu thematisieren und zu illustrieren.

Aufgabe 16 *„Zielscheibe“*

Lukas entwickelte folgende Aufgabe: Ein vierstufiger Pythagorasbaum wird auf eine rechteckige Platte gemalt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Gummipfeil den Pythagorasbaum zu treffen?

Diese Aufgabe ist ein Versuch an Elemente der Stochastik anzuknüpfen. Zur Berechnung der Treffwahrscheinlichkeit rechnete Lukas das Verhältnis zwischen dem Flächeninhalt des Rechtecks und des Baumes aus. Die Hauptidee der Aufgabe besteht in der Repräsentation der Wahrscheinlichkeiten durch Verhältnisse von Flächeninhalten (vgl. 2.5).

Aufgabe 17 *„Winkel“*

Daniel änderte die Winkelgößen bei der Hypotenuse und beobachtete, was sich dadurch ändert und was nicht. Welche Änderungen sind zu erwarten?

Daniel variierte die Winkelgröße und stellte fest, dass die Flächeninhalte der Quadrate über die Hypotenuse sich dadurch nicht änderten. Er leitete die allgemeine Formel für den Flächeninhalt und den Umfang des Baumes her. Da trigonometrische Funktionen ihm zum damaligen Zeitpunkt nicht bekannt waren, hatte er in einem Buch darüber nachgelesen.

Aufgabe 18 *„Rotationskörper“*

Damian fragte sich, welcher mathematische Körper entsteht, wenn man einen Pythagorasbaum rotieren lässt und wie man sein Volumen bestimmen könnte. Dafür musste er in einem Mathematikbuch die Formel für Volumina von Rotationskörpern nachschlagen, die er leider noch nicht verstand. Er hat sich auch gefragt, wie groß die Wahrscheinlichkeit wäre, einen Ball in die Öffnung zwischen den Ästen des Rotationskörpers zu werfen. Was meint ihr dazu?

Die vorgestellten Variationen wurden von den Schülern bearbeitet und in einer großen Runde diskutiert. Dabei stellten die Schüler fest, dass sie die Variation von Damian nicht bearbeiten konnten. Sie diskutierten dennoch gern über Rotationskörper und stellten fest, dass beispielsweise bei der Rotation von einem Dreieck ein Kegel und bei der Rotation von einem Rechteck ein Zylinder entstehen können. Die Schülervariationen ergänzten den Satz der Initialaufgaben und wurden in demselben Jahr neben den Einstiegs- und Initialaufgaben zunächst Lehramtsstudierenden der Humboldt-Universität zu Berlin und dann Schülern eines Gymnasiums in Aachen als Ideen zur Variation vorgestellt.

Erprobung bei Lehramtstudierenden (Berlin) 2009

In einer 90-minütigen Übung „Einführung in die Mathematikdidaktik" sollten die Studierenden sich zunächst in die Perspektive von Schülern hineinversetzen, um in Einzelarbeit die Einstiegsaufgabe (siehe S. 142) und in Gruppen die Initialaufgaben (siehe S. 142ff.) zu lösen. Anschließend sollten sie in die Lehrerrolle schlüpfen und ebenfalls in Gruppen Vor- und Nachteile der methodischen Vorschläge einschätzen.

Unter den Ergebnissen der Einstiegsaufgabe kamen Bezüge zu geometrischen Inhalten vor: Satz des Pythagoras, Höhensatz, Sinussatz, Kosinussatz, Flächeninhaltsberechnungen, Umfangsbeschreibung, Symmetrie, Spiegelung, Ähnlichkeits- und Strahlensätze, Netze und geometrische Körper. Als außergeometrische Bezüge wurden Folgen, Reihen und Fibonacci-Zahlen genannt. Die Abhängigkeit der Flächeninhalte der Quadrate von ihren Seitenlängen wurde als ein Beispiel für quadratische Funktionen identifiziert. Dabei veranschaulichte das Stammquadrat den Scheitelpunkt der entsprechenden Parabel. Bei der Bearbeitung von Initialaufgaben waren die Studierenden motiviert zusammenzuarbeiten und sogar gemeinsam ihre Ergebnisse zu präsentieren. Als fachinhaltliches Detail ist aufgefallen, dass die Studierenden den linearen Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt des symmetrischen Baumes und der Anzahl der Stufen unabhängig von den zu bearbeitenden Aufgabenstellungen entdeckten und neben den Lösungen der Initialaufgaben präsentierten. Die Studierenden stellten darüber hinaus fest, dass der Pythagorasbaum mit der wachsenden Stufenanzahl unbeschränkt wachsen kann.

Erprobung am Gymnasium (Aachen) 2009

Eine weitere Erprobung wurde in Aachen in einer regulären 9. Klasse eines Gymnasiums durchgeführt. Diese Erprobung konnte nicht direkt beobachtet werden und wurde durch Lehrerberichte und Kopien von Schülerlösungen sowie von Schülern entwickelter Aufgaben dokumentiert. Den Verlauf der Erprobung schilderte der unterrichtende Lehrer folgendermaßen:

Verlaufsbeschreibung: Ich hatte für die Durchführung der Rückschau zwei Doppelstunden und eine Einzelstunde Zeit. In der ersten Doppelstunde habe ich in einem informierenden Unterrichtseinstieg das Projekt vorgestellt und den Schülern den weiteren Ablauf erläutert.

Für die Bearbeitung der Einstiegsaufgabe benötigten die Schüler ca. 10 Minuten Zeit. Es wurde hier bereits deutlich, dass einige Schüler das Projekt sehr ernst nahmen und sich mit Eifer an die Arbeit machten, während andere die Rückschau nur noch als Hindernis vor den Ferien ansahen und sich überhaupt nicht dafür interessierten. Die Schülerlösungen spiegeln dies deutlich wider.

Nachdem ich die Einstiegsaufgaben eingesammelt hatte, habe ich versucht, möglichst gleich große Gruppen für die Initialaufgaben einzuteilen, wobei die Schüler nach Möglichkeit selber das Thema auswählen sollten. Die Schwierigkeit bestand darin, dass fast alle Schüler in die Gruppen mit den zuletzt behandelten Themen wollten, weil sie dadurch den Aufwand für die Wiederholung des länger zurück liegenden Stoffs reduzieren wollten. Jede Gruppe sollte ihre Lösung auf ein DIN A3 Blatt aufschreiben, damit die Lösungen in den folgenden Stunden den anderen Gruppen zur Verfügung ständen. Auch hier ist eine sehr unterschiedliche Bearbeitungsqualität erkennbar. Aus Zeitgründen habe ich die Lösungen nicht im Plenum vorstellen lassen. Die Gruppen haben bei der weiteren Arbeit aber auch nicht mehr darauf zurückgegriffen.

In der Einzelstunde habe ich die Expertengruppen gebildet und ihnen den Auftrag gegeben eine kapitelübergreifende Aufgabe samt Musterlösung zu entwickeln. Die Anregungen aus Berlin habe ich als Kopie mitgeliefert. Die Schüler haben die Anregungen zwar zur Kenntnis genommen, hatten aber den Anspruch, sich selber etwas auszudenken, was ihnen ja auch gelungen ist. Da die Einzelstunde eine 7. Stunde war und zudem am Tag nach dem zentralen Wandertag lag, war die Motivation der Schüler nicht besonders hoch; dennoch haben in jeder Gruppe mindestens zwei Schüler engagiert an den Aufgaben gebastelt.

Die letzte Doppelstunde benötigten die Schüler noch, um die Aufgaben fertig zu stellen, die Lösungen anzufertigen […]. Da dies gleichzeitig die letzte Stunde des Schuljahres war, mussten zum Schluss noch einige organisatorische Dinge geklärt werden, so dass eine Vorstellung und Besprechung der Aufgaben nicht mehr erfolgen konnte.

Bereits in der Verlaufsbeschreibung reflektiert der Lehrer die Erprobung und wertet diese aus. So berichtet er beispielsweise von der Schwierigkeit, dass fast alle Schüler in den Gruppen mit den zuletzt behandelten Themen arbeiten wollten. An einer anderen Stelle stellt er fest, dass seine Schüler den Anspruch hatten, selbst Aufgaben zu entwickeln. Die von den Schülern selbst erstellten Aufgaben bewertet er als gelungen.

Die Bemerkungen des Lehrers zu den fachinhaltlichen Aspekte des eingesetzten Aufgabennetzes befinden sich in seinen persönlichen Eindrücken, die er in einem besonderen Abschnitt in vier Punkten zusammenfasst:

Persönliche Eindrücke: Die Grundidee der kapitelübergreifenden Rückschau finde ich nach wie vor sehr gut. Allerdings zeigten sich in der Praxis doch einige Schwierigkeiten:

1. *Schuljahresende und mangelnde Motivation: Da die Rückschau notwendigerweise am Ende des Schuljahres stattfindet, fällt sie in eine Zeit, in der die Noten feststehen, im Unterricht nichts Wichtiges mehr gemacht wird, Wandertage und Konferenztage zu Unterrichtsausfall führen und die Sommerferien ihre Schatten voraus werfen. Dies führte bei vielen Schülern dazu, dass sie sich nicht bzw. nur mit großer Mühe und Antrieb durch den Lehrer auf die Rückschau eingelassen haben. Einige Schüler haben im Verlauf der Arbeit sogar großen Spaß und Engagement bei der Erstellung eigener Aufgaben entwickelt; viele andere aber haben die Zeit nur abgesessen und im günstigsten Fall die Gruppenarbeit nicht behindert. Das fand ich sehr schade.*

2. *Fachlicher Anspruch: Besonders für schwächere Schüler stellt die Rückschau, vor allem in der ersten Gruppenarbeitsphase eine sehr anspruchsvolle Tätigkeit dar. Schüler, die mit einem Themengebiet schon voll ausgelastet sind, sollen plötzlich den gesamten Stoff eines Schuljahres überblicken und sogar noch kreativ zu eigenständigen Aufgaben verarbeiten. Das fiel einigen*

schwächeren Schülern sehr schwer, wohingegen die stärkeren Schüler damit keine Probleme hatten und es sogar reizvoll fanden, nach Verbindungen zwischen den Themengebieten zu suchen.

3. *Umgang mit Ergebnissen, Auswertung: Will man die Schülerergebnisse wirklich würdigen und im Plenum vorstellen, so benötigt die Rückschau viel mehr Zeit als gewöhnlich am Schuljahresende zur Verfügung steht. Andererseits muss eine Anerkennung und Besprechung in irgendeiner Form erfolgen, denn sonst sehen die Schüler zur Recht keinen Sinn in ihrem Tun. Ich habe mich entschlossen, die von den Schülern gestellten Aufgaben in der Klasse 10 zur Vorbereitung auf die Abschlussprüfung einzusetzen.*

4. *Vorschläge zur Modifizierung: Um Zeit zu sparen, könnte man ca. eine Woche vor der eigentlichen Rückschau im Unterricht das Projekt vorstellen und auch schon den Rahmenkontext „Pythagorasbaum" einführen. Die Schüler erhielten dann die Langzeithausaufgabe, sich auf eines der Themengebiete vorzubereiten und die Initialaufgabe zu lösen. Die Gruppeneinteilung würde ich beim nächsten Mal vorgeben oder losen. Die eigentliche Rückschau im Unterricht vor den Ferien könnte dann direkt mit dem Erstellen der kapitalübergreifenden Aufgaben beginnen. Ob dies das Problem der Motivation löst, wage ich zu bezweifeln. Ich habe auch schon darüber nachgedacht, die Rückschau auf freiwilliger Basis anzubieten und den Schülern, die nicht an diesem kreativen Projekt teilnehmen wollen, in der Zeit andere Aufgaben zu geben (z.B. Wiederholungsaufgaben aus dem Schulbuch).*

Insgesamt hat es mir großen Spaß gemacht die kapitelübergreifende Rückschau auszuprobieren und auch vielen Schülern hat es Spaß gemacht an den Aufgaben zu basteln. Mit den obigen Einschränkungen und vielleicht den angedeuteten Modifizierungen würde ich die kapitelübergreifende Rückschau auf jeden Fall noch einmal in einer anderen Klasse durchführen.

Die Erprobung eines konkreten, auf die Inhalte des Rahmenlehrplans bezogenen Aufgabennetzes erlaubte dem Lehrer, eigene, auf die konkrete Lerngruppe bezogenen Modifikationsvorschläge zu formulieren. Die von dem Lehrer genannten Aspekte lassen sich wiederum bereits bei der theoretischen Auseinandersetzung (beispielsweise Zeitmangel, Motivation der Schüler, unterschiedliche Lernvoraussetzungen) finden (siehe Kapitel 2 und 3).

Die Rückmeldung des Lehrers lässt keinerlei Zweifel daran, dass der Kontext des Pythagorasbaumes sich zur Wiederholung und Vernetzung von Unterrichtsinhalten eignet. Im Gegensatz dazu würde er sogar im Vorfeld ein Projekt zum Pythagorasbaum durchführen wollen. Auch die Idee, die Schüler selbst nach Verbindungen zwischen verschiedenen Bereichen der Mathematik suchen zu lassen, findet der Lehrer sinnvoll und wichtig. Sein Bericht zeigt aber auch, dass er dies aus guten Gründen nicht allen Schülern zutraut. Er schreibt, dass insbesondere leistungsschwächere Schüler nicht „plötzlich" den gesamten Schulstoff überblicken, Verbindungen erkennen und selbst Aufgaben erstellen können. Die Schüler könnten jedoch nach und nach an diese Aufgabe herangeführt werden. Das Problem der Motivation und des zu hohen fachlichen Anspruchs möchte der Lehrer dadurch lösen, dass die Schüler sich auf freiwilliger Basis mit den Aufgaben im Kontext des Pythagorasbaumes beschäftigen.

Eine andere Möglichkeit, mit dem Problem der Überforderung der leistungsschwächeren Schüler umzugehen, besteht darin, dass sich die Schüler bereits nach der Einstiegsaufgabe entscheiden können, ob sie vorgegebene Initialaufgaben lösen oder eigene Aufgaben erstellen wollen. Neben diesen Möglichkeiten sind verschiedene Überlegungen zur Gestaltung der Gruppenarbeitsphasen anzustellen. Diese lassen sich teilweise aus den im Folgenden präsentierten Schülerergebnissen ableiten und im Zusammenhang mit den fachinhaltlichen Aspekten diskutieren.

Was sagen jedoch die Schülerergebnisse?[22] Als Ergebnisse der Einstiegsphase von 10 Minuten liegen 28 kleine Stichpunktsammlungen der einzelnen Schüler zu dem dreistufigen Pythagorasbaum vor. Alle 28 Schüler beobachteten, dass die Zeichnung sich auf den Satz des Pythagoras bezieht. 13 Schüler erwähnten, dass der Satz des Pythagoras nur für rechtwinklige Dreiecke gilt. Ein Schüler begründete die Rechtwinkligkeit der Dreiecke mit dem Kehrsatz des Satzes des Pythagoras. Ein Schüler erwähnte den Höhensatz. Fünf Schüler stellten Ähnlichkeiten von Teilfiguren fest und eine Schülerin entdeckte in der Zeichnung die Strahlensatzfigur. Einmal wurde die Gleichschenkligkeit der Dreiecke erwähnt und der Basiswinkel von 45° entdeckt. Darüber hinaus wurde zwischen den Ästen des Baumes eine Spiegelachse eingezeichnet. Drei Schüler bemerkten, dass die Figur durch Hinzufügen von Blättern fortgesetzt werden könnte. Zwei davon stellten fest, dass sich dieser Prozess bis in die Unendlichkeit fortführen lässt. Die Figuren wurden zwei mal um weitere Stufen ergänzt. Drei Schüler assoziierten die Figur mit dem Netz eines Würfels.[23]

Die von den Schülern in der Einstiegsaufgabe hergestellten Bezüge gingen über die Geometrie hinaus. So beschrifteten zwei Schüler Flächen mit Brüchen. Diese Brüche beschrieben das Verhältnis der Flächeninhalte der Figuren zu dem Flächeninhalt des Stammquadrates. In einer Lösung wurde sogar versucht, für alle Streckenlängen passende Brüche zu finden. In einer anderen Lösung wurde dargelegt, dass in der Zeichnung Dreiecke zu finden sind, die nur mit irrationalen Zahlen wie $\sqrt{2}$ beschrieben werden können. Von der Entdeckung der irrationalen Zahlen in der Zeichnung zeugte auch eine Bemerkung in einer der Lösungen: „Radius halbiert sich nicht. $c = \sqrt{a}$." Aus der Lösung lässt sich nicht schlussfolgern, welcher Radius gemeint war.

Zwei Schüler stellten fest, dass alle Seitenlängen ausgehend von der Stammdicke berechnet werden können. Ein Schüler behauptete, dass ausgehend von der Hypotenuse des Dreiecks aus der 1. Stufe der Flächeninhalt und der Umfang der gesamten Figur berechnet werden können. Ein anderer Schüler stellte fest, dass die Abstände zwischen zwei auseinander liegenden Ecken der benachbarten Quadrate auf verschiedenen Stufen des Baumes proportional zueinander sind.

[22] Auf der beiliegenden CD sind die eingescannten Schülerideen zu finden.
[23] Die Figur erinnert an Würfelnetze, ist jedoch kein Würfelnetz.

Drei Schüler stellten Gemeinsamkeiten zwischen dem Pythagorasbaum und Baumdiagrammen fest. Somit wurde eine Verknüpfung mit Elementen der Stochastik vorsichtig zum Ausdruck gebracht.

Aus dem Bericht des Lehrers lässt sich nicht entnehmen, wie die beschriebenen Ergebnisse aus der Einstiegsaufgabe ausgewertet wurden. Seine Beschreibung der Gruppeneinteilung lässt vermuten, dass diese Ergebnisse bei der Einteilung in Gruppen nicht weiter berücksichtigt wurden. Dies bedeutet, dass es von den Schülern abhängig war, inwiefern sie sich auf ihre Entdeckungen aus der Einstiegsphase bezogen.

In der nächsten Phase wurden den Schülern die Initialaufgaben „Zahlen und Längen“ (S. 143), „Abhängigkeit“ (S.143), „Ähnlichkeit“ (S. 143), „Kreis“ (S. 144) und „Baumdiagramme“ (S. 145) angeboten. Die Lösungen der Initialaufgaben befinden sich ebenfalls im Anhang.

An der Aufgabe „Zahlen und Längen“ (S. 143) arbeiteten fünf Schüler gemeinsam. Sie stellten mit Hilfe des Satzes des Pythagoras fest, dass der Vergrößerungsfaktor der Seitenlängen $\sqrt{2}$ beträgt. Die Schüler fanden heraus, dass es Seitenlängen gibt, die aus Produkten entstehen, die rationale Zahlen und eine irrationale Zahl enthalten.

In der Aufgabe „Abhängigkeit“ (S. 143) gelang es den Schülern, den quadratischen Zusammenhang zwischen der Stammdicke und dem Flächeninhalt zu entdecken und mit Hilfe einer Tabelle, eines Graphen und einer Gleichung darzustellen.

Quadrate, gleichschenklige Dreiecke und Teilfiguren auf den unterschiedlichen Stufen sind ähnliche Figuren, die die Schüler bei der Bearbeitung der Aufgabe „Ähnlichkeit“ (S. 143) identifizierten. Als Begründung für die Ähnlichkeit der Figuren zogen sie entsprechende Winkelgrößen heran und berechneten einen Ähnlichkeitsfaktor und zwar für eine bestimmte Stammdicke. Die Schüler merkten nicht, dass der Ähnlichkeitsfaktor für Dreiecke nicht von der Stammdicke abhängt. Für drei Stufen erschien der Baum den Schülern Broccoli-ähnlich. Bei mehreren Stufen würde ihrer Meinung nach die Ähnlichkeit mit Broccoli verloren gehen.

Bei der Bearbeitung der Aufgabe „Baumdiagramme“ (S. 145) zeichneten die Schüler einen Pythagorasbaum und beschrifteten ihn mit den entsprechenden Werten für Wahrscheinlichkeiten. Sie nannten folgende Vorteile des Pythagorasbaumes im Vergleich zum Baumdiagramm:

- Wahrscheinlichkeiten werden durch Flächeninhalte verdeutlicht.
- Es gibt Flächen zum Beschriften.

Als Nachteile werden folgende Stichpunkte aufgelistet:

- Unübersichtlichkeit;

- aufwendig zu konstruieren;
- bei weiteren Würfen kein Platz zum Schreiben;
- zu groß;
- Pfadmultiplikationsregel nicht anwendbar $\rightarrow$ nicht so gut hinschreibbar;
- Experimenteanzahl ist begrenzt.

Bei der Beschäftigung mit der Aufgabe „Kreis“ (S. 144) gelang es den Schülern, Flächeninhalte und Umfänge der Umkreise für drei Stufen des Pythagorasbaumes zu berechnen. Als Gesetzmäßigkeit stellten sie folgende Formel auf: $\sqrt{2}a = c$. Hierbei steht a für die Länge der Katheten und c für die Länge der Hypotenuse.

Zwei der sechs von den Schülern in Gruppen entwickelten Aufgaben wurden im Kontext des Pythagorasbaumes formuliert und werden im Folgenden kommentiert.

In der Abbildung 4.14 ist eine Aufgabe dargestellt, die offensichtlich als Variation der Aufgabe von Damian (S. 150) entstanden ist. Wie bei Damian weist diese Aufgabe auch Merkmale einer Einkleidung in eine außermathematische Situation auf. Die Grenzen zwischen Realität und Phantasiewelt, Mathematik und der Welt außerhalb von ihr fließen ineinander über (vgl. 3.2.4). Das von den Schülern gewählte Modell ist jedoch einfacher als in dem Vorschlag von Damian. Es geht hier nicht mehr um einen Rotationskörper, sondern es wird mit dem zweidimensionalen Pythagorasbaum argumentiert. Auch der Ball wird auf einen Kreis reduziert, was für die Bearbeitung der Fragestellung ausreichend ist. Diese beinhaltet die Frage danach, ob der Ball durch das „Loch“ zwischen den Ästen passt oder nicht. Es geht in der Aufgabe außerdem darum, wie viel Fläche um den Ball herum frei bleibt. Daran schließt sich die Frage an, ob der Ball auch durch das Loch in der nächsten Stufe passt. Die Schüler vermuteten, dass das Loch ein Sechseck sei.[24] Außerdem fragen sie nach der Ähnlichkeit und dem Ähnlichkeitsfaktor zwischen den beiden Löchern. In ihrer Lösung beantworteten sie alle Fragen erfolgreich. Lediglich die Begründung der Ähnlichkeit hat noch Potenzial zur Überarbeitung. Diese Aufgabe knüpft an die Themenbereiche *Satz des Pythagoras*, *Kreis*, *Ähnlichkeiten* an und streift nur am Rande *Irrationale Zahlen*. An dieser Aufgabe wird darüber hinaus sichtbar, dass die Schüler eine für sie noch unlösbare Aufgabe in eine lösbare modifizieren konnten. Diese Schülervariation bietet verschiedene Vertiefungsmöglichkeiten. So kann beispielsweise untersucht werden, ob das Loch tatsächlich sechseckig ist. Es kann aber auch nach einer präzisen Begründung der Ähnlichkeit der beiden Löcher gefragt werden. Eine Suche nach dem Zusammenhang zwischen Stufenanzahl und Größe des Loches kann zu dem Themenbereich *Funktionen* überleiten.

[24] Das stimmt nicht, denn in der fünften Stufe berühren sich die Quadrate und es entsteht ein siebeneckiges Loch.

Jen, Otto, Lea und Kim spielen Fußball. Der Ball hat einen Umfang von 84 cm. Diesen Ball möchten sie durch einen Pythagorasbaum schießen.
Dieser hat ein Ausgangsdreieck c = 50cm (Hypotenuse).
Passt der Ball durch das mittlere Loch?
Wie groß ist der Flächeninhalt des im Sechseck enthaltenen Kreises? Wie viel Fläche in cm² bleibt übrig oder fehlt, wenn der Ball gerade durchgeschossen wird?
Würde der Ball auch durch das rechte Loch passen? Schätze. Sind die beiden Löcher ähnlich zueinander? Wenn ja, was ist der Ähnlichkeitsfaktor? (Runde wenn nötig.)

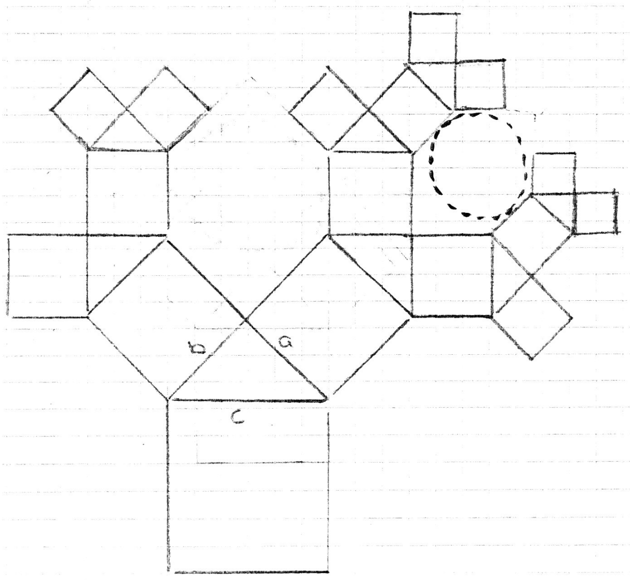
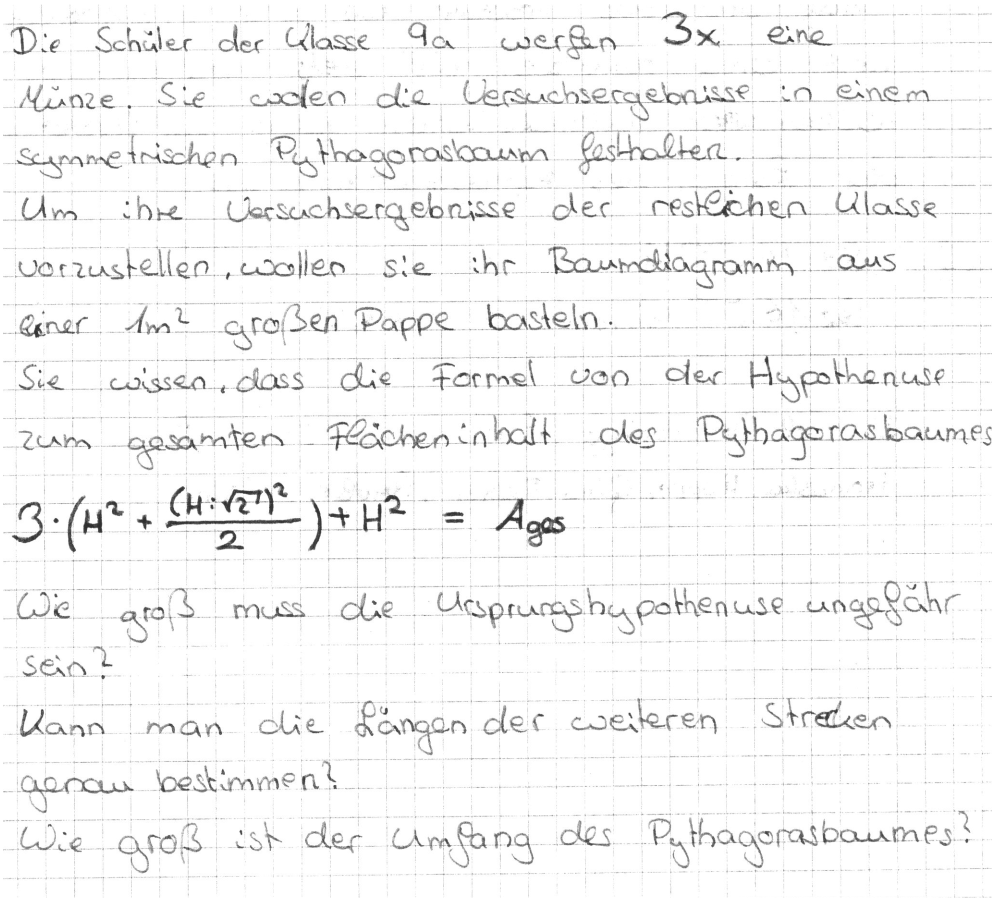


Abbildung 4.14: 1. Schüleraufgabe aus Aachen


Die Schüler der Klasse 9a werfen 3x eine Münze. Sie wollen die Versuchsergebnisse in einem symmetrischen Pythagorasbaum festhalten.
Um ihre Versuchsergebnisse der restlichen Klasse vorzustellen, wollen sie ihr Baumdiagramm aus einer $1m^2$ großen Pappe basteln.
Sie wissen, dass die Formel von der Hypothenuse zum gesamten Flächeninhalt des Pythagorasbaumes

$$3\cdot\left(H^2+\frac{(H:\sqrt{2})^2}{2}\right)+H^2 = A_{ges}$$

Wie groß muss die Ursprungshypothenuse ungefähr sein?
Kann man die Längen der weiteren Strecken genau bestimmen?
Wie groß ist der Umfang des Pythagorasbaumes?

Abbildung 4.15: 2. Schüleraufgabe aus Aachen

Auch die nächste Schüleraufgabe (siehe Abb. 4.15) kann als eine Einkleidungsaufgabe interpretiert werden. Die Situation der Aufgabe ist eine schulische und knüpft direkt an die Ereignisse im Mathematikunterricht an. Anhand eines symmetrischen Pythagorasbaumes wollten Schüler der Klasse 9a die Ergebnisse eines dreimaligen Münzwurfs vorstellen. Um ihre Ergebnisse der ganzen Klasse präsentieren zu können, wollen sie den Baum aus Pappe basteln. Dieser Motivation, die durchaus als authentische gedeutet werden kann, schließen sich drei Fragen an. Die ersten beiden Fragen nach der Hypotenusenlänge des Ursprungsquadrates und den genauen Längen der weiteren Strecken könnten beim Basteln des Pythagorasbaumes in der Tat hilfreich sein. Dass die Frage nach dem Umfang des Baumes das Basteln erleichtert, ist eher unwahrscheinlich. Im Zentrum der Aufgabe stehen Modellvernetzungen.

Um die Aufgabe zu lösen, leiteten die Schüler eine allgemeine Formel zur Bestimmung des Flächeninhalts eines dreistufigen symmetrischen Pythagorasbaumes her. Dies geschah mit Hilfe des Satzes des Pythagoras. In die hergeleitete Formel setzten sie den gegebenen Wert für den Flächeninhalt der Pappe ein und lösten eine quadratische Gleichung, um die Hypotenusenlänge zu bestimmen. Als Antwort auf die Frage danach, ob es möglich ist, weitere Streckenlängen genau zu bestimmen, argumentierten sie mit $\sqrt{2}$. Da die rationalen Zahlen nicht zur Beschreibung von Streckenlängen ausreichen, konnten einige Streckenlängen nur ungenau berechnet werden. Zuletzt wurde eine Formel für den Umfang des Baumes hergeleitet. Dabei wurden offensichtlich Ähnlichkeitsfaktoren der einzelnen Strecken berücksichtigt. Die Aufgabe verknüpfte die Themenbereiche *Satz des Pythagoras*, *Ähnlichkeit*, *Irrationale Zahlen* und *Mehrstufige Zufallsexperimente*. Sie bot verschiedene Anknüpfungspunkte für Diskussionen und Vertiefungen im Unterricht. So könnten die Schüler beispielsweise versuchen, das Modell anzuwenden und einen Pythagorasbaum mit der hergeleiteten ursprünglichen Hypotenusenlänge basteln. Ob ein Quadrat mit dem gegebenen Flächeninhalt sich auf die Teilfiguren des Pythagorasbaumes aufteilen lässt, wäre eine weitere mögliche Frage.

Erprobung am Gymnasium (Berlin) 2009

Am Ende des Schuljahres 2008/09 wurde das Aufgabennetz „Pythagorasbaum" in einer 9. Klasse eines Gymnasiums in Berlin erprobt. Aufgrund der Unterschiede in den Rahmenlehrplänen für Berlin und für Nordrhein-Westfalen wurde die Aufgabe „Baumdiagramme" (S. 145) gegen die Aufgabe „Schätzen" (S. 145) ausgetauscht. Darüber hinaus wurde die Aufgabe „Broccoli" (S. 144) als Zusatzaufgabe angeboten.

Im Gegensatz zur Erprobung in Aachen stand dem unterrichtenden Lehrer in Berlin nur eine Doppelstunde zur Verfügung, weil die Schüler in Berlin am Ende der 9. Klasse ein Betriebspraktikum abschließen mussten. In dieser Doppelstunde wurden die Einstiegsaufgabe und die Initialaufgaben bearbeitet. Das Entwickeln von eigenen Aufgaben wurde zur freiwilligen Hausaufgabe. Erst nach dem zweiwöchigen Praktikum sammelte der Lehrer Schülerprodukte ein. Daraus ausgewählte Beispiele sind der Gegenstand des vorliegenden Abschnittes.

Bei der Bearbeitung der Einstiegsaufgabe (S. 142) wurden neben Ähnlichkeit, Symmetrie, Umfang, Flächeninhalt, Gleichschenkligkeit, Rechtwinkligkeit, der Satz des Pythagoras, der Höhensatz, der Kathetensatz und der Strahlensatz, der Satz des Thales und die Innenwinkelsumme im Dreieck erwähnt. Ein Schüler zeichnete Thales-Kreise ein. Ein anderer Schüler vermutete, dass die Zeichnung (siehe Abb. 4.2, S. 128) durch Spiegelung entstanden sei. Weitere Schüler schrieben Formeln zur Berechnung von Flächeninhalten und Umfängen von Dreiecken, Quadraten und Kreisen auf, aber auch Formeln zu den bereits erwähnten Sätzen.

Als außermathematische Aspekte erwähnten einige Schüler die Ähnlichkeit mit dem Stammbaum. Eine Schülerin assoziierte die Zeichnung mit ihren Empfindungen für

Mathematik: *„Das Bild sieht komisch aus und erinnert mich an viele qualvolle Stunden.“* Nichtsdestoweniger ließ sie sich auf die Beschäftigung mit dem Pythagorasbaum ein.

Die Ergebnisse der Schüler werden im Folgenden vorgestellt. In der Lösung der Aufgabe „Zahlen und Längen“ (S. 143) wurde zunächst ausgehend von einem Beispiel gezeigt, dass bei einem Stammquadrat mit dem Flächeninhalt 100cm^2 als Seitenlängen 10cm und $\sqrt{50}$ heraus kommen. Dann kam es zur Untersuchung des Baumes mit dem Stammquadrat von 50cm^2. Anschließend stellte sich heraus, dass $\sqrt{2}$ in diesem Fall nicht auszuweichen ist.

Im Laufe der Erprobung wurde die Aufgabe „Abhängigkeit“ (S. 143) durch die Zusatzaufgabe „Broccoli“ (S. 144) ersetzt, die aus der Schülerperspektive ansprechender formuliert war.[25] In der Abbildung 4.16 ist der Lösungsversuch dokumentiert. Gleich am Anfang kam die Vermutung auf, dass es sich herbei um eine Potenzfunktion handele. Daraufhin wurde der Broccoli-Kopf mit Hilfe einer Kugel modelliert. Die entsprechende Funktionsgleichung kam durch die Anwendung der Formel für das Kugelvolumen zustande. Des Weiteren fasst die Tabelle einzelne Werte für verschiedene Stammdicken oder Durchmesser der Kugel zusammen. Anschließend wurde ein Graph gezeichnet, der symmetrisch zur y-Achse ist. Das ist nicht richtig, da es sich in dem Fall um eine kubische Funktion handelt. Der Definitionsbereich der Funktion muss hier auf nicht-negative Werte begrenzt werden.[26]

Die Lösung der Aufgabe „Ähnlichkeit“ (S. 143) enthält Beweise nach dem Ähnlichkeitssatz. Die Figuren beschrifteten die Schüler mit Großbuchstaben und untersuchten auf Kongruenz und Ähnlichkeit. Dabei schätzten sie Ähnlichkeitsfaktoren ab, ohne diese genau zu berechnen. Infolgedessen kamen bei den Ähnlichkeitsfaktoren nur Brüche vor.

Bei der Bearbeitung der Aufgabe „Kreis“ (S. 144) berechneten die Schüler die Umfänge und die Flächeninhalte mit Hilfe von *GeoGebra* (siehe Abb. 4.17). Anschließend wurden anhand der drei Punkte zwei quadratische Parabeln gezeichnet und entsprechende quadratische Gleichungen aufgestellt. Während der funktionale Zusammenhang im Fall der Parabel eher der Wahrheit entspricht, ist der Zusammenhang zwischen dem Radius des Umkreises und seinem Umfang kein quadratischer. An dieser Stelle eröffnet sich eine Perspektive auf die qualitativen Unterschiede in den funktionalen Zusammenhängen sowie den entsprechenden Gleichungen und Graphen. Darüber hinaus kann die Begrenzung der Definitionsmenge auf nicht-negative Werte diskutiert werden. Der Pythagorasbaum bietet durch seine Mehrstufigkeit verschiedene Möglichkeiten, Beziehungen zwischen den Objekten auf verschiedenen Stufen als funktionale Abhängigkeiten zu untersuchen.

[25] Dies machte sich an dem Meldeverhalten der Schüler bemerkbar.

[26] Die Bearbeitung der Aufgabe ist u.a. der Motivation und dem Engagement der Schülerin mit der Bemerkung zu den qualvollen Stunden zu verdanken.

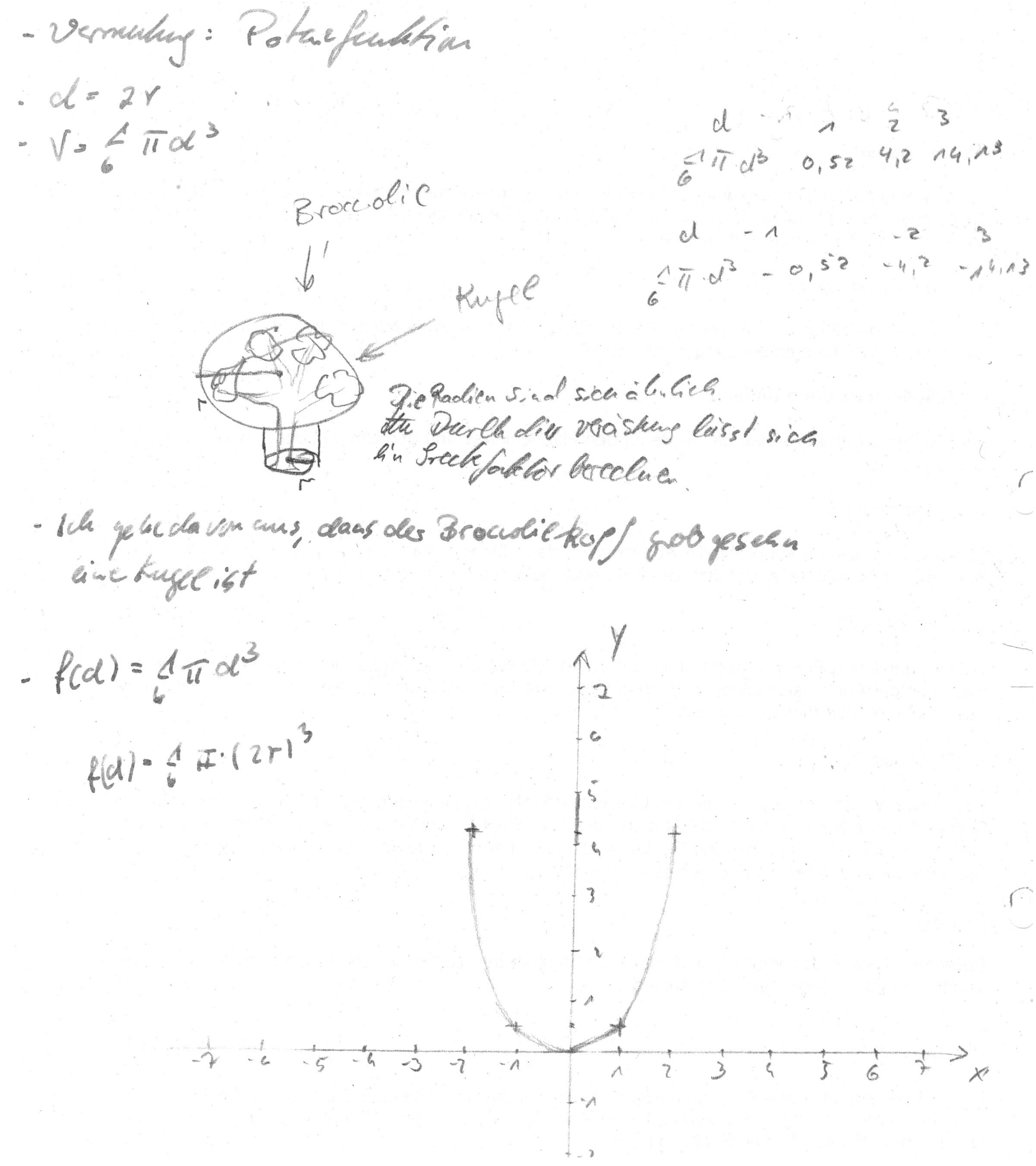


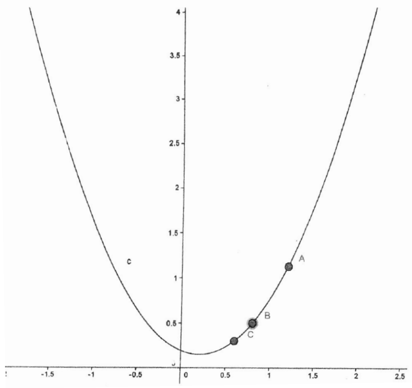
Abbildung 4.16: 1. Modell des Broccoli-Kopfes

$A_{K1}= \pi/4 *d^2$

$A_{K1}= \pi/4*(1{,}2cm)^2$	$A_{K2}= \pi/4*(0{,}8cm)^2$	$A_{K3}= \pi/4 * (0{,}6cm)^2$
$A_{K1}= 1{,}13\ cm^2$	$A_{K}= 0{,}5cm^2$	$A_{K3}= o{,}3\ cm^2$

$U_K=\pi*d$

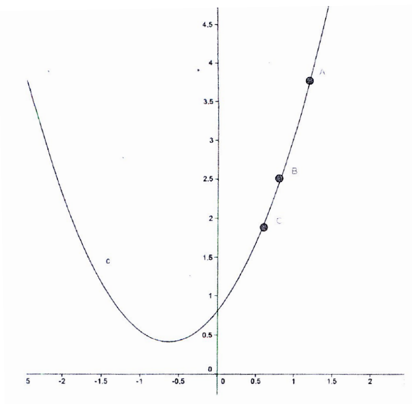
$U_{K1}=\pi*1{,}2cm$	$U_{K2}=\pi*0{,}8cm$	$U_{K3}=\pi*0{,}6cm$
$U_{K1}=3{,}77\ cm$	$U_{K2}=2{,}52\ cm$	$U_{K1}=1{,}885\ cm$



$P=(d|A_K)$

$A=(1{,}2|1{,}13)$
$B=(0{,}8|0{,}5)$ → $y=x^2-0{,}42x+0{,}19$
$C=(0{,}6|0{,}3)$

x=d
y=A



$P=(d|U_K)$ f

$A=(1{,}2|3{,}77)$
$B=(0{,}8|2{,}51)$ → $y = x^2 + 1.3x + 0.76$
$C=(0{,}6|1{,}88)$

x=d
y=U

Abbildung 4.17: Kreis

Umfrage:

		Schätzungen geordnet:	
Brian	25 cm^2	3	
Jonas	15 cm^2	4	
Tim	6,5 cm^2	4,5	
Eric	20 cm^2	5	Median = 5
Dennis	25 cm^2	6	
Philipp	16 cm^2	6,5	
Laurenz	30 cm^2	10	
Paul	6,0 cm^2	12	
Dustin	4,0 cm^2	15	
Alex	3,0 cm^2	15	
Silvan	12 cm^2	16	
Leona	5,0 cm^2	20	Median = 20
Lisa	4,5 cm^2	25	
Nina	10 cm^2	25	
Julia	15 cm^2	30	

Modalwert = 25 cm^2, 15 cm^2

Median = 12 cm^2

Median u. = 5 cm^2

Median o. = 20 cm^2

arithm. Mittel = 13,13 cm^2

Spannweite = 27

Lösung:

$A = a^2 + e_A + 2b^2 + 2f_A + 4c^2 + 4g_A + 8d^2$

$A = 5{,}256\ cm^2$ f

Antwort:

Der Flächeninhalt der gezeichneten Figur beträgt 5,256 cm^2.

Vergleich:

Leona hat gewonnen!

Die meisten der befragten Personen haben die Fläche der Figur zu groß geschätzt.

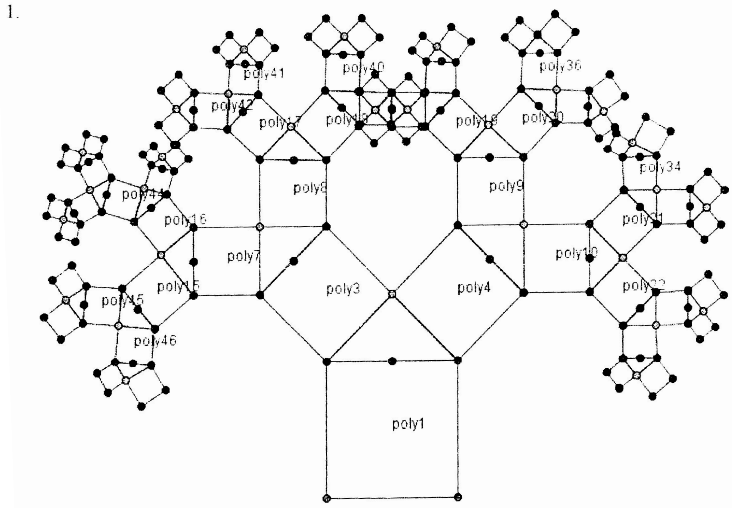
Im Gegensatz haben nur vier Personen die Fläche zu klein geschätzt.

Abbildung 4.18: Schätzen

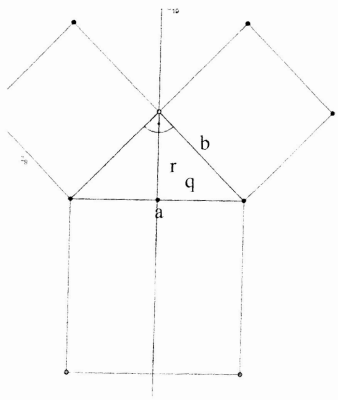
Beim „Schätzen" starteten die Schüler eine Umfrage zu dem Flächeninhalt des Pythagorasbaumes in der Klasse. Dokumentation und Auswertung der Umfrage erfolgten mit Hilfe von statistischen Kennwerten und wurden in zwei Sätzen als Fazit zusammengefasst (siehe Abb. 4.18).

Unter den von den Schülern entwickelten Aufgaben befand sich folgende: *Erweitere den Pythagorasbaum auf Stufe 5 und suche nach ähnlichen Größen und Längen. Anschließend entwickle eine Formel, mit der Du, in einem symmetrischen Pythagorasbaum, von einer Stufe die Größen der jeweils nächsten ausrechnen kannst.* In Abbildung 4.19 ist die von den Schülern mit Hilfe von *GeoGebra* erstellte Lösung dieser Aufgabe dokumentiert.

1.



- alle Quadrate sind ähnlich zueinander
- alle Dreiecke sind ähnlich zueinander



$$r = q$$
$$q = \frac{a}{2} = r$$
$$r^2 + q^2 = b^2$$
$$2 \cdot r^2 = b^2$$
$$\sqrt{2} \cdot r = b$$
$$\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} = b$$
$$\left(\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}\right)^2 = b^2$$

Abbildung 4.19: Hausaufgaben

Als Ergänzung fügten die Schüler unter der Quellenangabe[27] nicht symmetrische Pythagorasbäume hinzu (siehe Abb. 4.20).

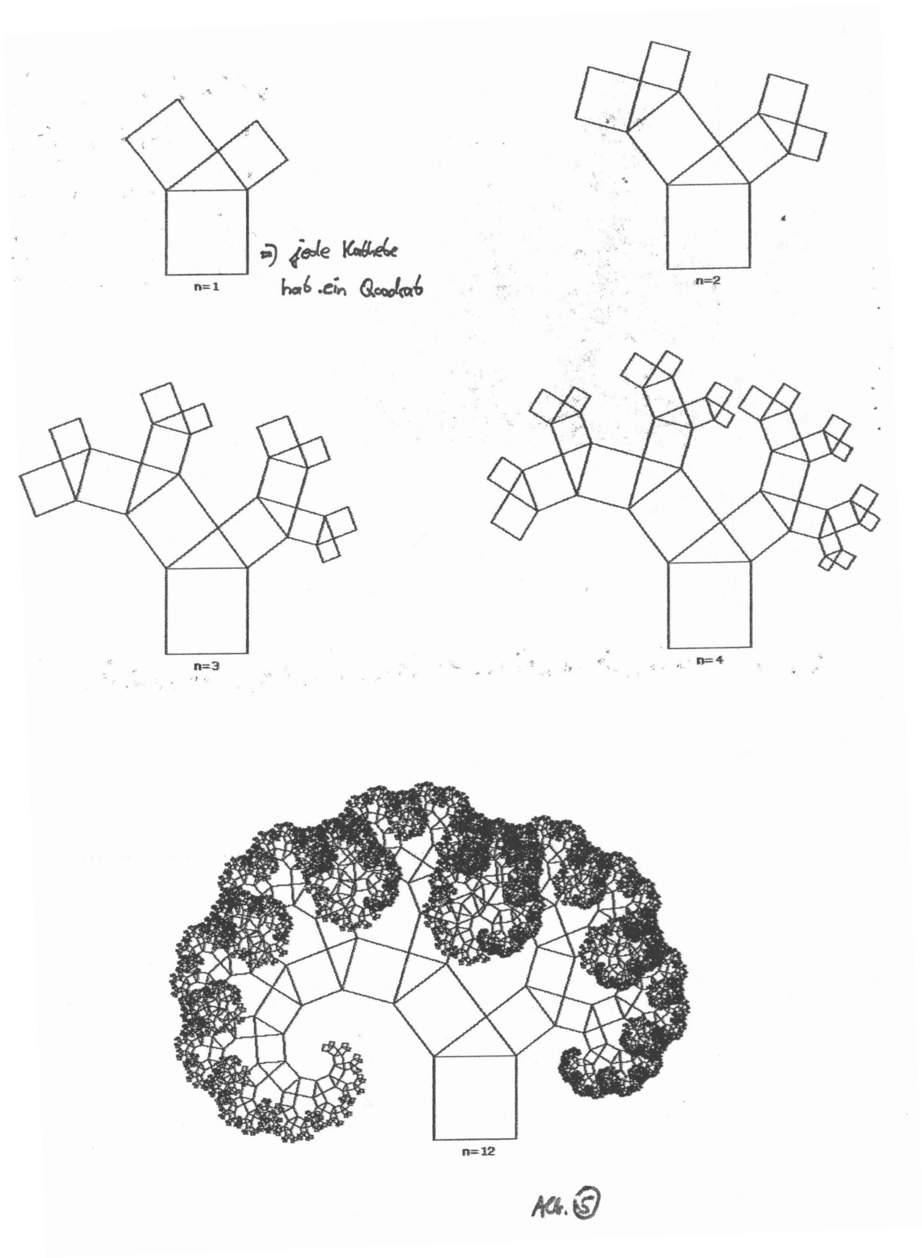


Abbildung 4.20: Weiterführende Ideen

[27] www.fh-friedberg.de

Erprobung am Gymnasium (Berlin) 2010

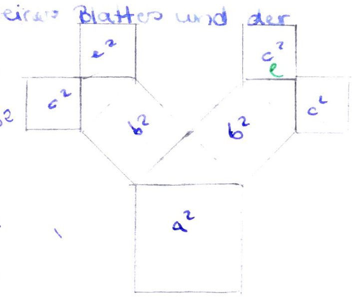
Ausgehend von einem Beispiel für einen nicht symmetrischen Pythagorasbaum (siehe Abb. 4.20) wurden den Schülern derselben Lerngruppe in Berlin im Jahr darauf weitere Aufgaben vorgestellt. Das waren die Aufgaben „Fortsetzung“ (S. 146), „Hippokrates-Möndchen“ (S. 144), „Flächeninhalt“ (S. 146), „Baumdiagramme“ (S. 145) und „Broccoli“ (S. 144) sowie Ideen der MSG-Schüler aus der Erprobung 2009 (S. 148ff.). Die Erprobung erstreckte sich über zwei Doppelstunden nach MSA[28]-Prüfung. Eine Doppelstunde galt der Beschäftigung mit den Initialaufgaben und die zweite ihrer Präsentation.

Beim Lösen der Aufgabe „Fortsetzung“ (S. 146) arbeiteten Schüler unterschiedlicher Leistungsstärke zusammen. Ihre Lösung ist in der Abbildung 4.21 zu finden. Es gelang den Schülern, den Zusammenhang zwischen der Stufenanzahl des Baumes und dem Flächeninhalt der Blätter mit Hilfe einer Exponentialfunktion zu beschreiben und ihre Umkehrfunktion zu bestimmen. Bei der Ermittlung der Flächeninhalte vergaßen sie jedoch, die Länge der Hypotenuse zu quadrieren. Als Folgefehler verdoppelte sich die gesuchte Anzahl der Stufen. Als nächstes beschrieben sie mit Hilfe eines Terms die Abhängigkeit der Blätteranzahl von der Stufenanzahl und ermitteln die Anzahl der Stufen eines Baumes, der mehr als 100000 Blätter besitzt. Die Schüler dieser Gruppe hatten sich am Wochenende getroffen, um zu sichern, dass alle einschließlich der (nach der Einschätzung des Lehrers) leistungsschwächeren Schülern die Aufgabe verstehen und erklären konnten. Bis auf einen kleinen Fehler gelang es den Schülern, ihre Kenntnisse über den Satz des Pythagoras, über Exponentialfunktionen und Logarithmen miteinander zu verknüpfen, um die Aufgabe zu bearbeiten.

Um die Aufgabe „Möndchen des Hippokrates“ (S. 144) zu lösen, arbeiteten Nikita und Laura zusammen. Ihre Arbeit wurde während der Gruppenarbeitsphase genauer beobachtet. Die von ihnen präsentierte Lösung enthält algebraische und geometrische Elemente (siehe Abb. 4.22). Die Schüler fertigten zunächst eine Zeichnung an. Dann ordnete Nikita verschiedenen Flächeninhalten entsprechende Formeln zu, konnte diese jedoch nicht vereinfachen. Laura gelang es, die in der Formel vorkommenden Terme zu vereinfachen. Sie arbeitete rein formal, ohne ihre Formeln auf geometrische Konzepte zu beziehen. In dem vorletzten Lösungsschritt (vierte Zeile) halfen die Termumformungen den Schülern nicht mehr weiter, so dass sie die Lehrperson um Hilfe bitten mussten. Daraufhin wurden die Schüler an den Satz des Pythagoras erinnert und interpretierten die Variablen a, b und c als Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck. Diese Interpretation ermöglichte weitere Umformungen mit Hilfe des Satzes des Pythagoras. Das Ergebnis dieser Umformungen ist die fünfte Zeile in der Lösung. Als nächstes übersetzten die Schüler die Formel in einen Text, in dem sie schrieben, dass der Flächeninhalt der beiden

[28]Mittlerer Schulabschluss.

1. Zusammenhang: Flächeninhalt eines Blattes und der Stufenzahl



Nach S.d.P.: $a^2 = 2b^2$

$b^2 = 2c^2$

$\Rightarrow a^2 = 4c^2$

$a^2 = 2\cdot 2c^2$

$a = \sqrt{2}\cdot b \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$a = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot c \Rightarrow c = \frac{a}{(\sqrt{2})^2}$

$\Rightarrow \ell_{(n)} = \frac{a_0}{(\sqrt{2})^n}$

$\ell_{(n)} = \frac{a_0}{(\sqrt{2})^n} \quad /\cdot(\sqrt{2})^n$

$(\sqrt{2})^n\cdot \ell_{(n)} = a_0 \quad /:\ell_{(n)}$

$(\sqrt{2})^n = \frac{a_0}{\ell_{(n)}} \quad /\log_{10}$

$n\cdot\log_{10}(\sqrt{2}) = \log_{10}\left(\frac{a_0}{\ell_{(n)}}\right) \quad /:\log_{10}(\sqrt{2})$

$n = \frac{\log_{10}\left(\frac{a_0}{\ell_{(n)}}\right)}{\log_{10}(\sqrt{2})} \Rightarrow n = \frac{\log_{10}\left(\frac{a_0}{\ell_{(n)}}\right)}{\log_{10}(\sqrt{2})}$

2. Stufenanzahl für $\ell = \frac{1}{128}$ $a_0 = 1$

$n = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{128}\right)}{\log_{10}(\sqrt{2})}$

$n = 14$

3. Stufenanzahl für 1'000'000 Blätter

$2^x > 1'000'000 \quad /\log_{10}$

$x\cdot\log_{10}2 > \log_{10} 1000000 \quad /:\log_{10}2$

$x > \frac{\log_{10} 1000000}{\log_{10} 2} > 19.93$

$= 20$

Probe: $2^{20} = 1\,048\,576 > 1000'000$

Abbildung 4.21: Fortsetzung und Logarithmen

Lösungsidee:

$$S_1+S_2=(K_2+K_3)-(K_1-\Delta ABC)$$

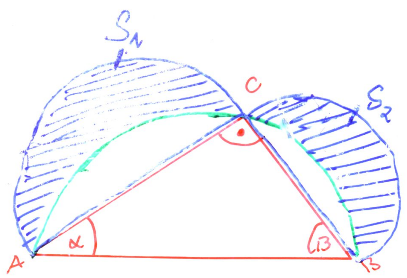
$$S_1+S_2=\left(\frac{\frac{\pi\cdot b^2}{4}}{2}+\frac{\frac{\pi\cdot a^2}{4}}{2}\right)-\left(\frac{\frac{\pi\cdot c^2}{4}}{2}-\frac{ab}{2}\right)$$

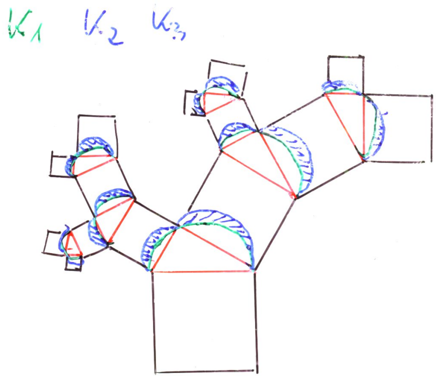
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{c^2}{4}\right)+\frac{ab}{2}$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot(\underbrace{b^2+a^2-c^2}_{c^2-c^2=0})+\frac{ab}{2}$$

$$S_1+S_2=\frac{ab}{2}$$

Skizze: $\gamma=90^\circ$ Thaleskreis $\Rightarrow$ SdP





Antwortsatz: Die Summe der Flächeninhalte der Möndchen ist gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks.
Da der Winkel γ auf dem Thaleskreis verläuft, gilt dies angelehnt an den Satz des Pythagoras für alle Dreiecke und deren Möndchen.
Dieses Verhältnis verändert sich im Pythagoras-Baum nur nach einem konstanten Ähnlichkeitsfaktoren

Abbildung 4.22: Möndchen des Hippokrates

Hippokrates-Möndchen dem Flächeninhalt des Dreiecks gleich sei. Sie erweiterten ihre Beobachtungen auf die nächsten Stufen des Pythagorasbaumes. Darüber hinaus stellten die Schüler Ähnlichkeiten fest und zeichneten entsprechende Figuren. Das Beispiel zeigt, wie zwei Schüler kooperierten und sich gegenseitig ergänzten, um ihr algebraisches und geometrisches Wissen erfolgreich zu kombinieren.

Als Lösung der Aufgabe „Flächeninhalt" (S. 146) wurde von den Schülern zunächst der symmetrische Fall des Pythagorasbaumes in den nicht-symmetrischen modifiziert und anschließend die Formel hergeleitet. Dafür knüpften die Schüler an ihre Kenntnisse aus der Trigonometrie an. In dieser Gruppe arbeitete eine der leistungsstärksten Schülerinnen der Klasse. Die Leistungen der anderen Schüler wurden vom Lehrer als gut und durchschnittlich bezeichnet. Die leistungsstärkste Schülerin übernahm die Führung in der Gruppe und sorgte dafür, dass jeder die Lösung verstanden hatte und erklären konnte. Daraufhin versuchten die Schüler gemeinsam, eine allgemeine Formel für den Umfang eines nicht-symmetrischen Pythagorasbaumes zu finden. Aus zeitlichen Gründen schafften sie es nicht, die Formel aufzuschreiben.

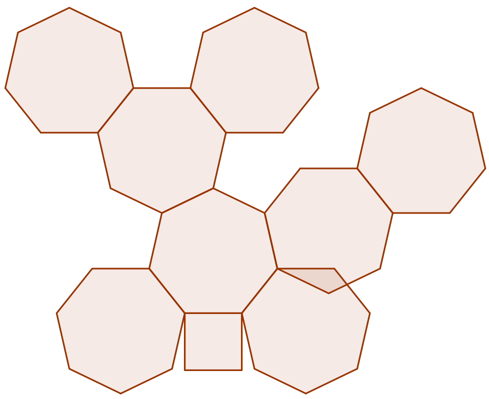


Abbildung 4.24: „Über sieben Ecken"

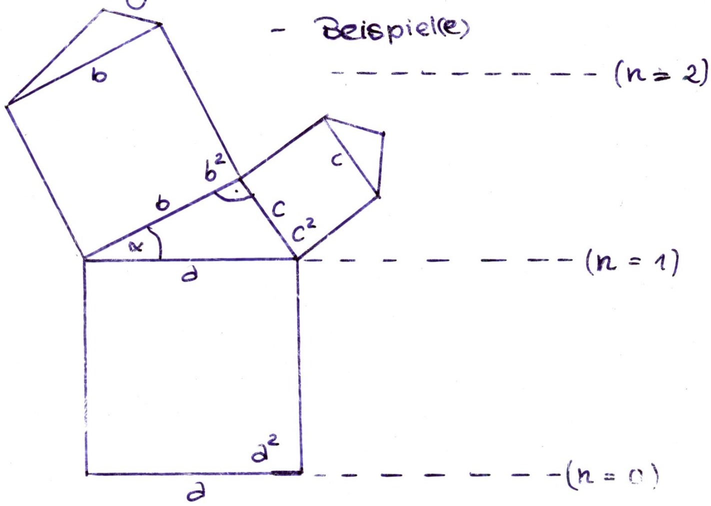
In Analogie zur Darstellung des Münzwurfs modifizierten die Schüler in der Aufgabe „Baumdiagramme" (S. 145) das rechtwinklige gleichseitige Dreieck zu einem regelmäßigen Siebeneck (siehe Abb. 4.24). Eine Seite des Siebenecks sollte an den Stamm angeschlossen werden. Die weiteren sechs Seiten des Siebenecks sollten den Anschluss an die Figuren ermöglichen, deren Flächeninhalte Wahrscheinlichkeitswerte für die Augenzahlen „Eins" bis „Sechs" darstellen sollten.[29] Schließlich überprüften sie ihre Idee mit Hilfe von *GeoGebra*.

[29] In diesem Rahmen diskutierten sie auch die Unmöglichkeit, ein Siebeneck mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Lösungsidee: (Strategie) - Zurückführen auf Bekanntes

- Beispiel(e)

Skizze:



geg. $A = (n+1)\,a^2 + \frac{n}{2}\, a^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

a = Stammdicke
n = Anzahl der Stufen
α = Winkel

$(n+1)\cdot a^2$: $a^2 = b^2 + c^2$ (SdP.) Stufe$_{(n)}$ = 1

⇝ Quadrate $a^2 + \underbrace{b^2 + c^2}_{a^2} = 2\,a^2$ $(1+1)\cdot a^2 = 2a^2$

$\frac{n}{2}\, a^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$: Allgemein gilt: (1) $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c$

⇝ Dreiecke

(2) $\sin(\alpha) = \frac{c}{a}$ ⇝ $c = \sin(\alpha) \cdot a$

~~Antwortsatz~~:

(3) $\cos(\alpha) = \frac{b}{a}$ ⇝ $b = \cos(\alpha) \cdot a$

(2) + (3) in (1) $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha) \cdot a \cdot \cos(\alpha) \cdot a$

$A_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot a^2$

⇝ Quadrate + Dreiecke : $A = (n+1)\cdot a^2 + \frac{n}{2} \cdot a^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Abbildung 4.23: Flächeninhalt

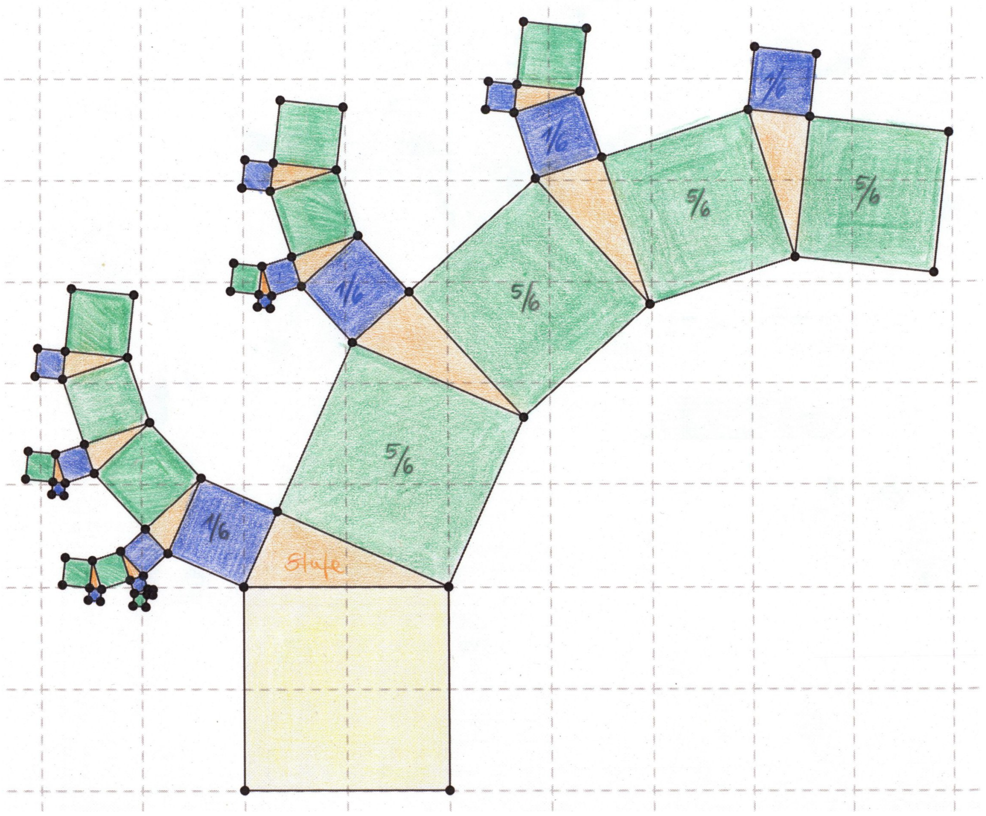


Abbildung 4.25: Würfel-Wurf

Nachdem die Schüler mit Hilfe von *GeoGebra* eingesehen hatten, dass das Modell mit den Siebenecken nicht passend sei, bekamen sie einen Hinweis bzgl. des Satzes des Thales. Sie konstruierten den entsprechenden Pythagorasbaum mit Hilfe von *GeoGebra* erneut (und richtig) und gestalteten ihn farbig (siehe Abb. 4.24).

Die Schüler verallgemeinerten die Darstellung auf weitere Bernoulli-Experimente. Anschließend reflektierten sie in einer Präsentation Vor- und Nachteile von Pythagorasbäumen. Die Schüler fanden, dass diese Darstellung für wenige Stufen und insbesondere für einen mehrmaligen Münzwurf sehr übersichtlich sei. Bei vielen Stufen erschien auch diesen Schülern die Zeichnung als unübersichtlich. Ebenfalls als Nachteil der Darstellung sahen sie die Überschneidung der Äste der Pythagorasbäume an. Wann das passieren könnte, konnten die Schüler allerdings nicht sagen. Somit entdeckten sie jedoch eine geometrische Fragestellung, die im weiteren Unterrichtsverlauf von ihren Mitschülern untersucht wurde. Als einen Vorteil des Pythagorasbaumes nannten sie außerdem die Möglichkeit, die Unterschiede zwischen den Werten für Wahrscheinlichkeiten durch Flächeninhalte zu verdeutlichen.

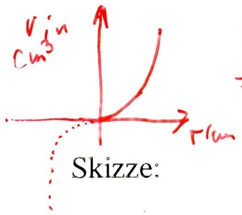
Die Gruppe, die sich mit der Aufgabe „Broccoli“ (S. 144) beschäftigte, bestand aus Schülern, deren Leistungen im Fach Mathematik nach der Einschätzung des Lehrers

Lösungsidee: Wir gehen von einer gleichmäßigen Struktur aus.

$d = 2r$ ⇝ $f(d) = \frac{1}{6}\pi (2r)^3$ ⇝ Potenzf. mit expo. Wachstum

$V = \frac{1}{6}\pi d^3$

• für die Stufe nehmen die Anzahl der Röschen, wobei der Radius gleich bleibt   1. Stufe $r = 1{,}5$

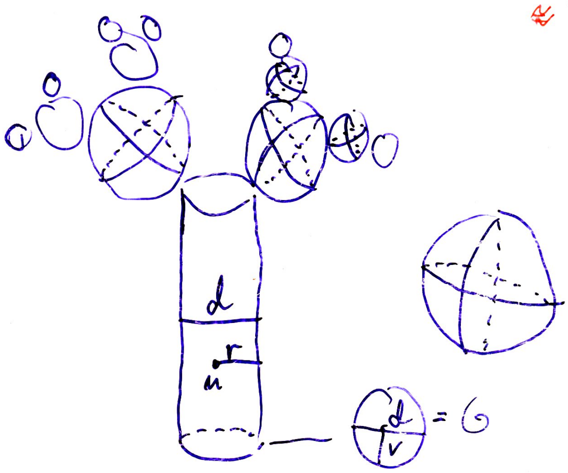


$\Rightarrow \frac{f(d)}{(V)} = \frac{\frac{1}{6}\pi (2r)^3}{n}$ Bsp.: $V = \frac{\frac{1}{6}\pi (2r)^3}{n}$

$= \frac{\frac{1}{6}\pi (2 \cdot 1{,}5)^3}{2}$

$\approx 7\ cm^3$

Skizze:



Antwortsatz:

Um zu zeigen, dass das Volumen V abhängig ist vom Durchmesser d gilt $f(d) = \frac{1}{6}\pi \cdot (2r)^3$.
Zur Volumenberechnung der Stufen wird nur die Anzahl der Röschen durch die obige Formel geteilt.

Abbildung 4.26: Broccoli (verfeinertes Modell) im Durchschnitt lagen. Die Schüler griffen auf Ergebnisse aus dem letzten Jahr zurück, versuchten jedoch, das Modell zu verfeinern (siehe Abb.4.26). Dies geschah dadurch, dass der Broccoli-Kopf nicht mehr als eine Kugel, sondern als ein aus einem Zylinder und aus mehreren Kugeln zusammengesetzter Körper modelliert wurde. Das entsprechende Modell wurde von den Schülern aufgezeichnet und beschriftet. Die Durchmesser der Kugeln entsprachen den Hypotenusen der Dreiecke im Pythagorasbaum. Die Schüler behaupteten, dass das Volumen der Kugel auf jeder Stufe gleich bleibe, was nicht stimmt. Auch beim nächsten Schritt machten sie einen Fehler, indem sie das Volumen der Kugel in einer Stufe durch n (Anzahl der Stufen) teilten, anstatt es mit der Anzahl zu multiplizieren. Außerdem vernachlässigten sie das Volumen des zylinderförmigen Stammes des von ihnen modellierten geometrischen Körpers. Die ermittelte Funktion bezeichneten die Schüler als eine Potenzfunktion mit exponentiellem Wachstum. Genau genommen handelte es sich bei dem von den Schülern beschriebenen Zusammenhang um eine Funktion zweier Variablen, was die Schüler anscheinend verwirrte. In der Präsentation wurden die Schüler auf ihre Fehler aufmerksam gemacht, was zu einer fruchtbaren Diskussion in der Auswertung führte, an der sich verschiedene Schüler der Klasse beteiligten.

Des Weiteren machten sich die Schüler dieser Gruppe Gedanken, ob das Modell nicht auch für die menschliche Lunge passend wäre. Sie stellten jedoch fest, dass der von ihnen modellierte Körper sich sowohl in seiner Oberfläche wie in seinem Volumen unendlich ausbreiten würde. Daraus schlussfolgerten sie, dass das Modell viel besser einen Tumor als eine menschliche Lunge beschreiben würde. Sie versuchten deshalb neue Körper zu entwerfen, die ein unbegrenztes Volumen und einen begrenzten Oberflächeninhalt besitzen. Spätestens hier kam es zu einer Verifikation und Reflexion des aufgestellten Modells. Im Rahmen einer außermathematischen Anwendung wurden Elemente der Geometrie, Algebra und von Funktionen, aber auch der Biologie durch die Schüler vernetzt. Die Beobachtung dieser Gruppe zeigte, dass die Schüler in der Lage waren, ein geometrisches Modell zu zeichnen, jedoch daran scheiterten, dieses Modell mathematisch korrekt mit Symbolen zu beschreiben. Nichtsdestoweniger waren sie fähig, bei der Reflexion des Modells im Hinblick auf biologische Fragen das Wesentliche zu erkennen (vgl. 3.3).

Die Ergebnisse der Erprobungen des Aufgabennetzes „Pythagorasbaum“ 2009 und 2010 wurden in Nachbesprechungen mit dem Lehrer ausgewertet. Auf der fachinhaltlichen Ebene sah der Lehrer Anknüpfungspunkte an die Inhalte der gymnasialen Oberstufe. So würde er beispielsweise in der Zukunft bei der Einführung der Integralrechnung zur Berechnung von Flächeninhalten auf die Flächeninhalte der Hippokrates-Möndchen eingehen. Der Lehrer war auch mit der Zusammenarbeit der Schüler in Gruppen und den Ergebnissen der Präsentationen zufrieden. Um die Auseinandersetzung mit dem

Pythagorasbaum zu vertiefen und das reichhaltige Potenzial des Kontextes weiter auszuschöpfen, bot er beim nächsten Mal den Einsatz von Portfolios an. Im Zusammenhang mit dem Portfolio könnten Kriterien zur Bewertung von den durch die Schüler hergestellten Vernetzungen ausgearbeitet werden. Als Fachseminarleiter erachtete er es für wichtig, die Idee der Aufgabennetze seinen Referendaren vorzustellen. Daraufhin wurden Aufgabennetze Referendaren vorgestellt und diskutiert.

Erprobung mit Lehramtsstudierenden (Berlin) 2010

Im Jahr 2010 wurden Überlegungen zu den sozialen Aspekten der Vernetzungen in Mathematik (vgl. 3.3) erneut einer Gruppe von Lehramtsstudierenden vorgestellt. Sie sollten selbst im Kontext des Pythagorasbaumes ein Aufgabennetz oder zumindest eine Skizze dafür entwickeln. Dabei sollten sie sich auf die Vorgaben des Rahmenlehrplans einer ausgewählten Doppeljahrgangsstufe beziehen. Die Studierenden arbeiteten 30 Minuten in kleineren Gruppen zusammen und stellten ihre Ergebnisse innerhalb der nächsten 30 Minuten vor. Als Arbeitsmaterialien standen ihnen lediglich Ausschnitte aus dem Rahmenlehrplan und ein Blatt mit der Zeichnung des symmetrischen dreistufigen Pythagorasbaumes zur Verfügung.[30]

Für die Doppeljahrgangsstufe 5/6 erarbeiteten die Studierenden nicht nur Stichpunkte, sondern sie formulierten auch konkrete Aufgaben. Diese Aufgaben beziehen Inhalte der Geometrie ein. So soll beispielsweise der Umfang des Baumes bestimmt werden. In der nächsten Aufgabe sollen Innenwinkelsummen verschiedener Dreiecke untersucht und miteinander verglichen werden. Durch verschiedene Stufen ergibt sich die Möglichkeit, Innenwinkelsummen von Dreiecken gleicher und verschiedener Größen miteinander zu vergleichen.[31] Vielleicht wird den Schülern auffallen, dass alle Dreiecke in ihren Winkeln übereinstimmen. Sie können dann untersuchen, ob die Winkelsumme nur in diesem Fall 180° beträgt oder auch für alle anderen Dreiecke. Die dritte Aufgabe knüpft an die Proportionalität an und verknüpft einen geometrischen Bereich mit einem außergeometrischen. Die letzte Fragestellung bleibt schließlich innerhalb der Geometrie.

Bei der Untersuchung inhaltlicher Bezüge für die Doppeljahrgangsstufe 7/8 formulierten Studierende nicht nur geometrische Aufgaben. Prozentrechnung, Bruchrechnung und Verhältnisaufgaben sowie Wurzelfunktionen als Umkehrfunktionen von quadratischen Funktionen waren inhaltliche Bezugspunkte, die hier von Studierenden angedeutet wurden.[32] Darüber hinaus schlugen die Studierenden vor, den Baum im Koordinatensys-

[30] Eine Gruppe bemerkte, dass der Pythagorasbaum als Symbol für die Schulmathematik mit ihren verschiedenen Leitideen verstanden werden könnte. Die Studierenden versuchten, die Teilflächen des Pythagorasbaumes mit den Bezeichnungen für Leitideen zu beschriften.

[31] An dieser Stelle können auch Kongruenzsätze thematisiert werden.

[32] Die Vorschläge der Studierenden gehen an dieser Stelle über die Vorgaben des Berliner Rahmenlehrplans für die Doppeljahrgangsstufe 7/8 hinaus.

tem zu zeichnen und Koordinaten der Dreieckseckpunkte zu untersuchen. Anschließend könnten die Seitenlängen und die Winkelgrößen gemessen und Innenwinkelsummen bestimmt werden. Die Schüler sollten dann die Lage der einzelnen Eckpunkte der Dreiecke variieren und schauen, ob sich dadurch die Seitenlängen, die Winkelgrößen oder die Innenwinkelsummen in Dreiecken verändern.

Für die Doppeljahrgangsstufe 9/10 wurde von Studierenden ein Aufgabennetz entwickelt und Beziehungen zwischen den Aufgaben herausgearbeitet. Ausgehend vom symmetrischen Pythagorasbaum analysierten die Studierenden gründlich mögliche innergeometrsiche Bezugspunkte: Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, Bestimmung der Seitenlängen mittels des Satzes des Pythagoras, Flächeninhalt des Baumes, Erweiterungen auf dreidimensionale Körper[33], Beweis des Satzes des Pythagoras und Variation des symmetrischen Falls mit Hilfe des Satzes des Thales. Die Fragestellungen streiften außerdem Quadratwurzeln und ihre Näherungswerte.

Darüber hinaus wurden bei der Auswertung weitere jahrgangsstufenübergreifende inhaltliche Bezüge genannt: Rechte Winkel, Symmetriebetrachtungen, Kongruenz, Ähnlichkeit und Selbstähnlichkeit, Spiegelung, Verschiebung, Drehung, Winkelberechnung, Kathetensatz und weitere geometrische Betrachtungen. Als außergeometrische Bezüge wurden Quadratzahlen, Folgen, Reihen, Grenzwerte und Rekursion erwähnt. Außerdem würden die Studierenden den Pythagorasbaum verwenden, um durch Flächeninhalte und Verhältnisse zwischen ihnen die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Brüchen zu erklären.

4.1.3 Reflexion über den Einsatz des „Pythagorasbaums“

Die Erprobungen werden nicht vollständig vorgestellt, sondern es werden Fragmente ausgewählt, welche insbesondere die im Kapitel 3 ausgearbeiteten theoretischen Aspekte illustrieren sollen. So wird beispielsweise der Pythagorasbaum als ein geometrisches Modell für Brüche, Funktionen, Grenzprozesse und Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Fachinhaltliche Aspekte (vgl. 4.1.1)

Bei den im Abschnitt 4.1.2 vorgestellten Erprobungen wurden in den Erprobungsgruppen folgende geometrische Themen besprochen (siehe S. 148, S. 151, S. 154, S. 159):

- Satzgruppe des Pythagoras,
- Ähnlichkeit,
- Strahlensätze,

[33] Dies geschieht dadurch, dass der Pythagorasbaum als Grundriss eines aus Prismen zusammengesetzten Körpers betrachtet wird.

- rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke,
- Umkreise, Thales-Kreise und Hippokrates-Möndchen,
- Flächeninhalte und Umfänge von Figuren.

Als Fragestellungen wurden Möglichkeiten der Fortsetzung des Pythagorasbaumes und Überschneidungen der Äste des Baumes thematisiert. Aus geometrischen Fragestellungen hervorgehende Zusammenhänge wurden mit Hilfe von Brüchen, irrationalen Zahlen und Funktionen untersucht. So wurden Fragen nach dem Flächeninhalt von Teilfiguren u.a. mit Hilfe von Brüchen beantwortet. Fragen nach Änlichkeitsfaktoren und Umfängen führten zu irrationalen Zahlen.

Die beteiligten Schüler gelangten zu Erkenntnissen, die für die Autorin und die Lehrpersonen unerwartet waren und die durch Initialaufgaben nicht unmittelbar angeregt wurden:

- Proportionalität der Abstände zwischen zwei nicht identischen Eckpunkten von benachbarten Quadraten einer Stufe (S. 154),
- Linearität der Abhängigkeit zwischen Stufenanzahl und dem Flächeninhalt des Baumes bei einem symmetrischen Pythagorasbaum mit vorgegebenen Längen (S. 174).

Insofern zeigen die Erprobungen, dass die Schüler in der Lage waren, selbständig oder mit Hilfe der Initialaufgaben verschiedene fachinhaltliche Bezüge zwischen Geometrie, Arithmetik und Algebra zu entdecken. Sie zeigen aber auch, welche innermathematischen Beziehungen einer weiteren Beschäftigung im Unterricht bedürfen. So zeigte sich beispielsweise beim Anknüpfen an die Kreisthematik (siehe S. 144), dass die Schüler nicht nur die Abhängigkeit des Kreisflächeninhalts, sondern auch des Kreisumfangs von seinem Radius als quadratische Zusammenhänge interpretierten.

Darüber hinaus traten im Zusammenhang mit Fragen nach Blattgrößen und der Anzahl der Stufen, auf denen sich die Blätter befinden, logarithmische Funktionen auf (S. 146). Diese wurden von den Schülern selbständig als passende innermathematische Modelle ausgesucht. Weitere mathematische Modelle und Aspekte von Funktionen entstanden bei der Modellierung von geometrischen Körpern (S. 144).

Neben Verknüpfungen zwischen Geometrie, Arithmetik und Algebra wurden durch das Schätzen (S. 145) von Flächeninhalten und das Darstellen von Wahrscheinlichkeiten (S. 171) Brücken zu Elementen der Stochastik geschlagen. So stellten die Neuntklässler aus Aachen bereits in der Einstiegsphase fest, dass der Pythagorasbaum und Baumdiagramme eine ähnliche Form haben (S. 154). Da die Schüler bei den anderen Erprobungen nicht auf diese Idee kamen, wurde sie ihnen in der Initialaufgabe „Baumdiagramme“

(S. 145) vorgestellt. Während die Schüler in Aachen über Vor- und Nachteile der Darstellungen diskutierten (S. 155), übertrugen die Berliner Schüler die Variation der Darstellung auf Würfel-Experimente (S. 148, S. 166). Die Beschäftigung mit dem Pythagorasbaum als einer Darstellung für Bernoulli-Experimente führte in den Erprobungsgruppen zum Wiederholen und Festigen von bereits Gelerntem aus der Geometrie (Satz des Thales, Satz des Pythagoras) und verdeutlichte die Pfadregeln aus dem Stochastikunterricht. Dabei streiften die Schüler in ihren Diskussionen ernsthafte mathematische Fragen (z.B. Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks, S. 169).[34] Sie stellten und verwarfen bzw. belegten ihre eigenen Vermutungen und bewerteten neue Darstellungen im Vergleich zu ihnen bekannten Baumdiagrammen. Um Vernetzungen zu Elementen der Stochastik herzustellen, sollten die Schüler analysieren, welche Variationen innerhalb eines Gebietes (z.B. dynamisches Ziehen bzw. Wandern der Dreiecksspitze auf dem Thales-Kreis [Geometrie]) Veränderungen in einem anderen Gebiet (Veränderung der visualisierten Wahrscheinlichkeitswerte [Stochastik]) nach sich ziehen.

Einkleidungen als neue Kategorie (vgl. 3.2.4)

Sowohl bei der Bearbeitung der Einstiegsaufgabe und der Initialaufgaben wie auch beim Erstellen von eigenen Aufgaben überschritten die Schüler die Grenzen der Mathematik. Dies wurde beispielsweise durch die Initialaufgabe „Broccoli“ intendiert. Die wenigen außermathematischen Assoziationen der Schüler, die durch die Bearbeitung der Einstiegsaufgabe entstanden, („Gerüchte“, „Freunde und Feinde“, „qualvolle Mathematikstunden“, „Gesellschaft“ und „Stammbäume“, S. 148) können als Modelle für den Pythagorasbaum als einem mathematischen Sachverhalt interpretiert werden. Bei der Modellierung von Broccoli oder der Lunge ändert sich die Richtung des Modellierungskreislaufes. Hier geht es eher um Anwendungen mathematischer Inhalte auf außermathematische Phänomene.

Deutlicher treten Aspekte der Einkleidung in den von den Schülern selbst erstellten Aufgaben hervor. So wird ein Ball in eine Fragestellung zu einem Rotationskörper integriert. An einer anderen Stelle wird der Pythagorasbaum zu einer „Wurfscheibe“ bzw. zum „Baumdiagramm“ aus Pappe. Hierbei vermitteln Einkleidungen zwischen verschiedenen Aspekten der Mathematik und zwischen verschiedenen Schülergruppen, wie in den Aufgaben zu Rotationskörpern (S. 150).

[34] In 2.2.1 wurde erwähnt, dass Klein seinerzeit bedauerte, dass authentische Fragestellungen wie diese im Unterricht nicht angesprochen wurden.

Vernetzungen auf der sozialen Ebene (vgl. 3.3.2)

In den Einstiegsphasen der Erprobungen zeigte sich, dass die Schüler ausgehend von dem Pythagorasbaum vielfältige und reichhaltige innermathematische Beziehungen entdecken konnten (siehe S. 148, S. 151, S. 154, S. 159). Die Ergebnisse zu den Initialaufgaben wurden in Gruppenarbeit erzielt (S. 148, S. 160, S. 166, S. 174). Insofern können sie nur anhand von Beobachtungen des Unterrichts oder knapp dargestellter Lösungswege und Lösungsskizzen bewertet werden. Im Vergleich mit der Einstiegsaufgabe, in der die Schüler ausgehend von einer Zeichnung ihre Ideen und Gedanken offener äußern konnten und dies auch taten, waren die Wege zum Lösen der Initialaufgaben bereits in der Aufgabenstellung angedeutet. Das Ziel war dabei, behandelte Unterrichtsinhalte zur Diskussion zu stellen. Insofern liegt es nahe, dass auch in den Ergebnissen der Schüler beim Lösen der Initialaufgaben kaum von der Lehrperson unerwartete Bezüge auftraten. Beim Herstellen von eigenen Aufgaben knüpften die Schüler eher an die Ideen anderer Schüler als an die Initialaufgaben an (S. 149, S. 156, S. 164). Dies war auch dann der Fall, wenn die Ideen nicht aus der eigenen Lerngruppe kamen. Es wäre zu überlegen, wie bei der Bearbeitung der Einstiegsaufgabe formulierte und für die Lehrperson unerwartete Schülerideen stärker in die Bearbeitung von Initialaufgaben einfließen könnten. Eine Möglichkeit bestünde darin, die Einstiegsaufgabe nicht an dem gleichen Tag wie die Initialaufgaben bearbeiten zu lassen. So könnte die Lehrperson die Ideen und Stichpunkte der Schüler bei der Konstruktion entsprechender Initialaufgaben stärker einbeziehen.

Linguistische Aspekte (3.4)

In den Erprobungen stellte sich heraus, dass der Bezug auf geometrische Visualisierungen (wie die Zeichnung in der Einstiegsaufgabe) die direkte Kommunikation innerhalb von Kleingruppen erleichterte. Andererseits erwies sich das Führen von schriftlichen, linear angeordneten Beweisen und das Aufschreiben von erzielten Ergebnissen für die Schüler als herausfordernd. Davon zeugt z.B. die Bearbeitung der Aufgabe über die Möndchen des Hippokrates, S. 144. Dieses Beispiel zeigt, wie die Schüler durch gegenseitige Kompensation von Stärken und Schwächen, mit Unterstützung des Lehrers und mit Rückgriffen auf Geometrie ihre Schwierigkeiten beim Aufschreiben formaler Beweise überwanden. In diesem Fall trat ein mathematischer Beweis möglicherweise auch als „Kommunikationsauslöser“ bzw. Mittel der Überzeugung auf. Bei der Anwendungsaufgabe mit der Modellierung eines Broccoli-Kopfes gelang es den Schülern ebenfalls, eine passende geometrische Visualisierung des Modells zu finden (S. 144). Dennoch fehlte ihnen die fachsprachliche Kompetenz, um diese Visualisierung entsprechend in einen mathematischen Text zu übersetzen. Dass sie ihre Modelle selbst wählten und präzisierten, wertet ihre Versuche dennoch auf.

Zusammenfassung

Die Ergebnisse der Erprobungen zeigten, dass Schüler und Studierende (S. 151) ihre Kenntnisse aus verschiedenen Gebieten der Mathematik zur Untersuchung des Pythagorasbaumes anwenden konnten. Sie variierten verschiedene mathematische Darstellungsebenen, die Anzahl der Stufen des Baumes sowie Seitenlängen und Winkelgrößen in den Teilfiguren des Baumes. Sie kooperierten beim Aufstellen, Bestätigen und Widerlegen von Vermutungen (wie beispielsweise der Vermutung zum Siebeneck) und formulierten ihre eigenen mathematische Fragestellungen im Kontext des Pythagorasbaumes. In diesem Sinne können Vermutungen der Schüler nicht als vergebliche Versuche, sondern als Erfahrungen gedeutet werden, die ihre mathematischen Sprachfähigkeiten und somit möglicherweise ihr mathematisches Denken veränderten, wenngleich nur in geringem Maße (vgl. 2.2.5, 3.5).

Die Ergebnisse zu der Einstiegsaufgabe zeigten darüber hinaus, dass der Pythagorasbaum als eine geometrische Figur von den Schülern als Ausdrucksmittel für positive und negative Gefühle (z.B. Assoziationen mit Freunden oder mit qualvollen Mathematikstunden) eingesetzt wurde. So erinnern Überschneidungen und Verästelungen in einem Pythagorasbaum einen Schüler an Freunde und Feinde. Vielleicht ähneln qualvolle Mathematikstunden ihrer „Unendlichkeit“ wegen einem Fraktal, das bis in die Unendlichkeit fortgesetzt werden kann.

Darüber hinaus kann überlegt werden, wie der Einsatz des Computers gezielt in die Aufgabennetze integriert werden kann. Dies wurde bereits in verschiednen Masterarbeiten angegangen.

Die Ergebnisse der Erprobungen lassen vermuten, dass die am Beispiel des „Pythagorasbaums“ illustrierten Aufgabennetze wichtige Voraussetzungen für „vernetzende Wiederholungen“ im Mathematikunterricht schaffen, indem sie fachinhaltliche und soziale Aspekte in geigneten mathematischen Kontexten miteinander verknüpfen (vgl. 3.3, 3.4, 3.5). Inwiefern diese Voraussetzungen in konkreten Situationen zum „vernetzenden Mathematikunterricht“ beitragen oder nicht, hängt jedoch im Wesentlichen von den unmittelbar daran beteiligten Schülern und Lehrern ab.

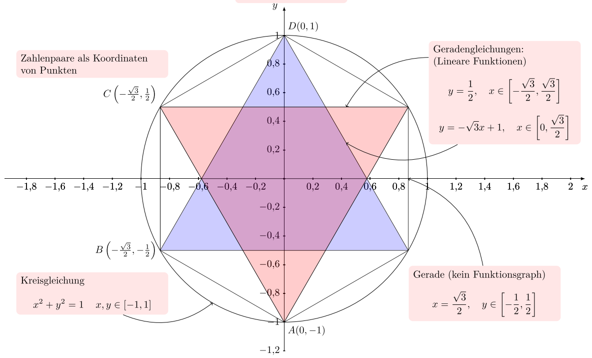
4.2 „Rund ums Sechseck“

In dem vorliegenden Abschnitt wird die Entwicklung, Erprobung und Reflexion eines weiteren Aufgabennetzes „Rund ums Sechseck“ vorgestellt. Bei der Entwicklung und

Erprobung dieses Aufgabennetzes verlagert sich der Fokus allmählich von Schülern über Studierende zu Lehrern. Lehrer werden hier nicht nur als Anwender, sondern auch als Träger professionellen mathematikdidaktischen Wissens betrachtet (vgl. Tenorth 2006b, 580ff.). Um einerseits der Kreativität der Lehrer Raum zu geben und gleichzeitig ihre Vorschläge zu bündeln, andererseits ihnen die Arbeit durch fachinhaltliche Anregungen zu erleichtern, wird auch in diesem Abschnitt ein geometrisches Objekt zum Gegenstand der Explorationen gewählt. Die Entwicklung des Aufgabennetzes „Rund ums Sechseck“ setzt ebenfalls bei der Potenzialanalyse der fachinhaltlichen Bezüge an.

Mathematik *rund* ums Sechseck

Koordinatengeometrie



Zahlenpaare als Koordinaten von Punkten

Geradengleichungen:
(Lineare Funktionen)

$$y = \frac{1}{2}, \quad x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$y = -\sqrt{3}x + 1, \quad x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1 \quad x, y \in [-1, 1]$$

Gerade (kein Funktionsgraph)

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

geometrische Objekte und ihre Lage mit Hilfe von Koordinaten beschreiben

Statistik
- Mittelpunktskoordinaten als arithmetische Mittelwerte
- $M(Sechseckmittelpunkt) = (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$
- Mittlere lineare Abweichungen ($d_{\bar{x}}$,$d_{\bar{y}}$) als Streckenlängen

$$\bar{x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 + 0\cdot 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2}{6} = 0 \qquad \bar{y} = \frac{-1 + (-\frac{1}{2})\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2 + 1}{6} = 0$$

$$d_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < d_{\bar{y}} = \frac{2}{3}$$

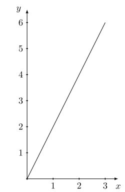
x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$H(x_i)$	2	2	2
$h(x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

y	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$H(y_i)$	1	2	2	1
$h(y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

- absolute Häufigkeiten des Vorkommens einer Koordinate ($H(x_i), H(y_i)$)
- relative Häufigkeiten des Vorkommens einer Koordinate ($h(x_i), h(y_i)$)

geometrische Objekte stochastisch beschreiben

Zuordnungen und Funktionen



proportional: *Seitenverhältnisse in ähnlichen Dreiecken*
Beispiel: In rechtwinkligen Dreiecken mit dem Winkel 30° gilt

$$y(Hypotenuse) \rightarrow x(Gegenkathete) = 2x.$$

linear: *Anzahl der Ecken → Innenwinkelsumme in Vielecken*

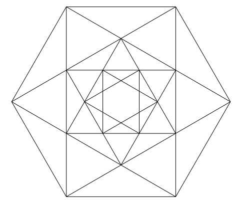
$$n \rightarrow I(n) = 180°n - 360°, \quad n \in N$$

quadratisch: *Anzahl der Ecken → Anzahl der Diagonalen in Vielecken*

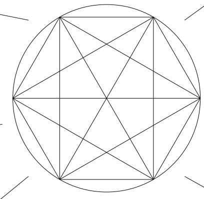
$$n \rightarrow d(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n, \quad n \in N$$

exponential: *Anzahl der Iterationen → Flächeninhalt des inneren Sechsecks*

$$n \rightarrow A(n) = A_0(\frac{1}{3})^n, \quad n \in N$$



geometrische Zusammenhänge mit Funktionen beschreiben



Negative Zahlen durch Koordinatensystem motivieren und veranschaulichen

Visualisierung von Wachstums- und Grenzwertprozessen

Grenzwertprozess

$$\lim_{n\to\infty} A_0(\frac{1}{3})^n = 0$$

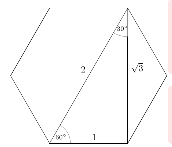
Visualisierung von Begriffen und Regeln

Abbildungen und Symmetrien

- Welche Symmetrien liegen vor?
- Wie sehen dabei Koordinaten der Punkte aus?
- Wie verändern sich Koordinaten der Punkte durch
  ... Spiegelungen an den Koordinatenachsen?
  ... Verschiebungen längs Koordinatenachsen?
  ... Drehungen um Koordinatenursprung?
- Wie verändern sich dabei die Gleichungen?

Beweisfigur

Trigonometrie



Beweise, dass

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 30° = \sqrt{3}.$$

Irrationale Zahlen motivieren

Visualisierung von Begriffen und Regeln

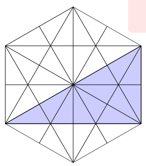
Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von negativen und positiven Zahlen durch Bewegungen im Koordinatensystem veranschaulichen

Visualisierung von Begriffen und Regeln

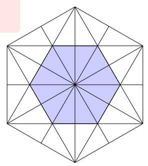
ebene Objekte als räumliche interpretieren

Beweisen, Begründen, Lokal Ordnen

Brüche veranschaulichen (Erweitern, Kürzen, Addieren, Subtrahieren)



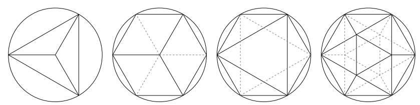
$$\frac{1}{3} = \frac{12}{36}$$



Stochastik
Ergebnismengen von Zufallsexperimenten veranschaulichen
- 36 Teildreiecke/zweimaliger Münzwurf
- 9 Spiele in einem Tennisturnier mit 6 Teilnehmern

Wahrscheinlichkeiten veranschaulichen
- Kreisdiagramm
- Kreisel
- Zielscheibe
- Glücksrad

Schrägbilder platonischer Körper



Ebene Geometrie

- besondere Dreiecke und Vierecke
- Winkelsätze an geschnittenen Parallelen
- Höhe, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte in gleichseitigen Dreiecken
- Innenwinkelsatz für Dreiecke und Vierecke
- Kongruenzsätze für Dreiecke
- Satz des Thales
- Winkelsätze am Kreis
- Umfang und Flächeninhalt von Vielecken
- Umfang und Flächeninhalt des Kreises
- Strahlensätze und Ähnlichkeit
- ...

4.2.1 Entwicklung der Initialaufgaben

Bei der Entwicklung des Aufgabennetzes „Rund ums Sechseck“ werden die bereits bei der Entwicklung der Aufgabennetze „Tangram“ (vgl. 1, 2.5) und „Pythagorasbaum“ (4.1) herausgearbeiteten Gestaltungsideen aufgegriffen. Mit der Wahl eines neuen geometrischen Kontextes kommen jedoch neue fachinhaltliche Aspekte (z. B. gleichseitige Dreiecke, Kreisgleichung) hinzu.

Potenzialanalyse des fachinhaltlichen Beziehungsgeflechts

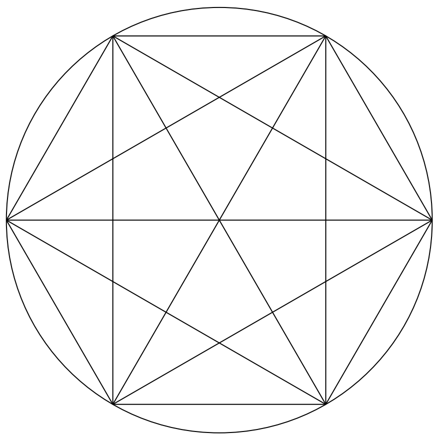


Abbildung 4.27: Sechseck im Kreis

Im Folgenden wird von einem regulären Sechseck, das in einen Kreis einbeschrieben ist, mit seinen Diagonalen ausgegangen. Den inhaltlichen Bezügen entsprechend wird die Figur in der Abbildung 4.27 aus unterschiedlichen Perspektiven betrachtet, interpretiert und modifiziert. Die dadurch entstehenden Themenkreise verflechten sich mit der Mathematik aus der Primarstufe und Inhalten der gymnasialen Oberstufe (z. B. Grenzprozesse). Einige dieser Bezüge sind in dem Diagram (siehe S. 180) themenkreisartig zusammengefasst.

Eine Veranschaulichung zur Bruchrechnung (5+)

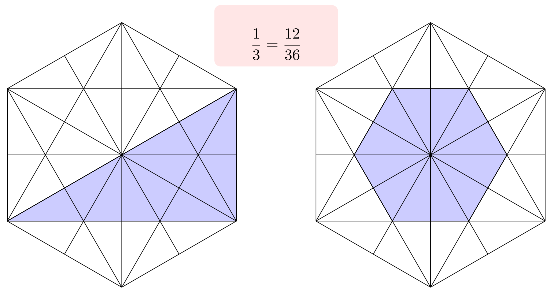


Abbildung 4.28: Sechseck-Brüche

Wie können in dem vorgestellten geometrischen Kontext beispielsweise Brüche dargestellt werden? Durch das Einzeichnen von Diagonalen zerfällt das Sechseck in Gruppen von kongruenten Dreiecken, die zu flächeninhaltsgleichen Figuren zusammengesetzt werden können. Wird ein Bruch mit Hilfe unterschiedlicher geometrischer Figuren dargestellt, so erhält das Äquivalenzklassenkonzept, das hinter der Bruchrechnung steht, eine zusätzliche Repräsentationsebene.[35] So wird in der Abbildung 4.28 ein Bruch durch zwei flächeninhaltsgleiche, aber hinsichtlich der Form unterschiedliche Figuren dargestellt. Das weitere Unterteilen von Figuren durch

[35] Um die Äquivalenz von Brüchen bzw. die Flächengleichheit zugehöriger geometrischer Figuren nachzuweisen, können geometrische Beweise geführt werden, in denen ab der 6. Klasse Kongruenz- und ab der 9.Klasse Ähnlichkeitssätze angewandt werden können.

Einzeichnen von Hilfslinien kann bei derartigen Darstellungen vorteilhaft sein und als Erweitern von Brüchen interpretiert werden. Analog zu den Ausführungen in 4.2 lassen sich anhand dieser Figur Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisionsaufgaben konstruieren. Auch hier liefern Ähnlichkeitsverhältnisse Darstellungsmöglichkeiten für Brüche durch Verhältnisse von Flächeninhalten.

Koordinatengeometrie (7+)

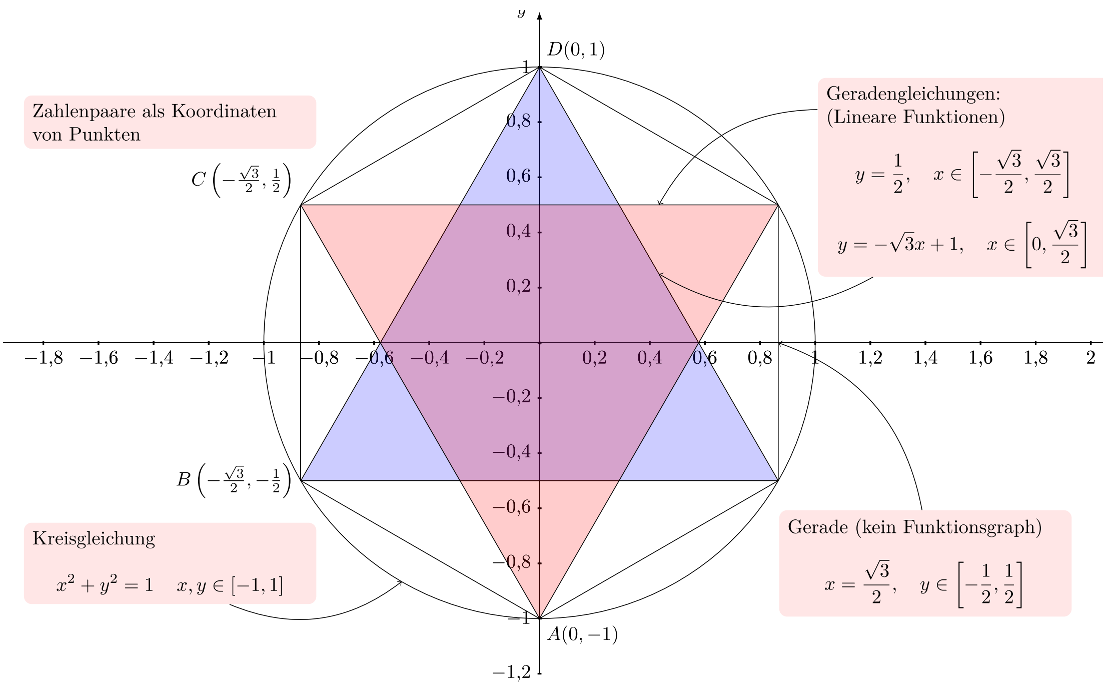


Abbildung 4.29: Sechseck im Koordinatensystem

In der Abbildung 4.29 finden sich Beispiele für Strecken, die mit Hilfe von Funktionsgleichungen beschrieben werden können. Es gibt aber auch Beispiele für Geraden, die bezüglich des gewählten Koordinatensystems nicht Graphen linearer Funktionen sind. Außerdem kann im Zusammenhang mit der Zeichnung die Kreisgleichung thematisiert und gleichzeitig der Satz des Pythagoras wiederholt werden. Auch die Frage, ob sich eine Kreislinie als Funktionsgraph interpretieren lässt, kann zur Festigung des Funktionsbegriffs bei den Schülern beitragen. So werden hier nicht nur Repräsentanten, sondern auch Nichtrepräsentanten eines Begriffes angeboten.

Abbildungen und Symmetrien (7+)

In 4.1 wurde am Beispiel des Pythagorasbaumes gezeigt, wie geometrische Zusammenhänge zwischen Figuren oder auch Bewegungen dieser Figuren mit Hilfe von Zahlenpaaren und Gleichungen untersucht werden können (siehe Abb. 4.29). Dies gilt auch für das Sechseck im Kreis.

Irrationale Zahlen (9+)

Im Gegensatz zum Pythagorasbaum, dessen Lage in einem Koordinatensystem ausschließlich mit rationalen Zahlenpaaren beschrieben werden kann, treten bei der Beschreibung der Sechsecks im Koordinatensystem irrationale Zahlen als Koordinaten auf. Dies kann als Motivation für die Einführung von irrationalen Zahlen herangezogen werden (siehe Abb. 4.29).

Gleichermaßen lassen sich auch hier irrationale Zahlen als Ähnlichkeitsfaktoren von Dreiecken bzw. Sechsecken motivieren. Ähnlichkeitsverhältnisse können zu Seitenverhältnissen in rechtwinkligen Dreiecken überleiten (vgl. 4.1).

Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken (9+)

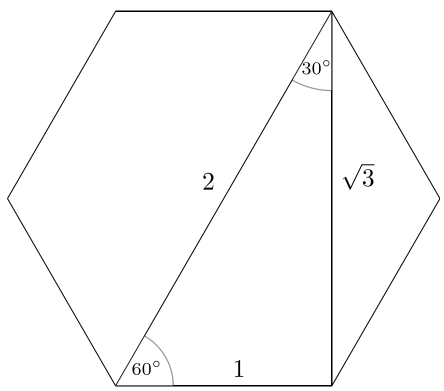


Abbildung 4.30: Seitenverhältnisse

Die Hypotenuse des in der Abbildung 4.30 dargestellten Dreiecks hat die gleiche Länge wie der Durchmesser des Umkreises des Sechsecks, während die kürzere Kathete und der Radius gleich lang sind. Unter der Annahme, dass der Umkreisradius 1 LE beträgt, kann die Länge der zweiten Kathete des dargestellten Dreiecks mit Hilfe des Satzes des Pythagoras bestimmt werden. Demnach beträgt sie $\sqrt{3}$. Auf der anderen Seite kann gezeigt werden, dass die Winkel des Dreiecks 30° bzw. 60° betragen.[36] Ausgehend davon lässt sich mit Hilfe der Definition von Verhältnissen in rechtwinkligen Dreiecken beweisen, dass $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sowie $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\tan 60° = \sqrt{3}$ gilt.

Zuordnungen und Funktionen (7+)

Auch im Kontext des regelmäßigen Sechsecks lassen sich geometrische Zusammenhänge mit Hilfe von Zuordnungen und Funktionen beschreiben und untersuchen. Im Folgenden sind einige wenige Beispiele dafür angegeben:

- *Proportionale Zuordnungen* (7+): In rechtwinkligen Dreiecken mit dem Winkel 30° gilt $x(Gegenkathete) \rightarrow y(Hypotenuse) = 2x, \quad x \in R$.

[36] Hierfür können beispielsweise Sätze über die Winkel an geschnittenen Parallelen oder Winkelsätze für Dreiecke angewandt werden.

- *Anti-proportionale Zuordnungen* (7+): In inhaltsgleichen Dreiecken sind Höhenlängen anti-proportional zu den entsprechenden Grundseitenlängen.
- *Lineare Funktionen* (8+): Die Anzahl der Ecken in Vielecken steht in einem linearen Zusammenhang mit den entsprechenden Innenwinkelsummen. Sie kann mit Hilfe der Gleichung $I(n) = 180°n - 360°$ mit $n \in N$ beschrieben werden.
- *Quadratische Funktionen* (9+): Die Anzahl der Diagonalen steht in einem quadratischen Zusammenhang zu der Anzahl der Ecken in Vielecken. Die entsprechende Gleichung lautet: $n \to d(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$ mit $n \in N$.
- *Exponentialfunktionen* (9+): Werden die Schnittpunkte der Diagonalen verbunden, so entsteht im Inneren des Sechsecks ein weiteres kleineres Sechseck (siehe Abb. 4.31). Dieser Prozess kann weiter geführt werden. Der Flächeninhalt der dabei entstehenden Sechsecke hängt exponentiell mit der Anzahl der Iterationen zusammen: $n \to A(n) = A_0(\frac{1}{3})^n$ mit $n \in N$.

Grenzprozesse (9+)

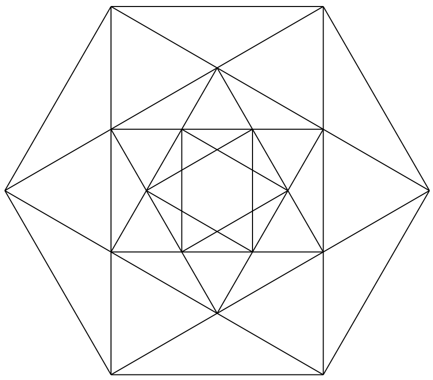


Abbildung 4.31: Grenzprozess

Die Figur in der Abbildung 4.31 lässt sich zur Veranschaulichung von Grenzprozessen heranziehen. Im Vergleich zum Pythagorasbaum (S. 136), dessen Flächeninhalt und Volumen mit zunehmender Anzahl von Stufen wächst, liefert der Kontext des regelmäßigen Sechsecks im Kreis Beispiele für immer kleiner werdende Flächeninhalte. Der Flächeninhalt des inneren regelmäßigen Sechsecks strebt gegen 0: $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{3})^n = 0$.

Wahrscheinlichkeiten und Kombinatorik (9+)

Die betrachtete Figur kann aufgrund ihrer Ähnlichkeit mit Kreiseln, Zielscheiben und Glücksrädern auch zur Darstellung von Ergebnismengen und Wahrscheinlichkeiten herangezogen werden. Hierbei können Übereinstimmungen und Unterschiede der Figur mit Kreisdiagrammen diskutiert werden (siehe Abb. 4.27).

Betrachtungen der Figur in der Abbildung 4.27 können zu kombinatorischen Fragestellungen (beispielsweise über die Anzahl der Diagonalen in einem Vieleck) führen. Die Diagonalen des Sechsecks können wiederum beispielsweise als Kombinationsmöglichkeiten bei sechs Spielern in einem Tennisturnier gedeutet werden.

Statistik

Wird die Figur in ein Koordinatensystem gezeichnet, so können auch hier Koordinatenmengen als statistische Datensätze betrachtet und mittels ihrer Kenngrößen verglichen werden (siehe Abb. 4.29 und Abb. 4.32). In der Abbildung 4.32 sind absolute

x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$H(x_i)$	2	2	2
$h(x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

y	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$H(y_i)$	1	2	2	1
$h(y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Abbildung 4.32: Koordinaten als statistische Datensätze

$(H(x_i), H(y_i))$ und relative Häufigkeiten $(h(x_i), h(y_i))$ der beiden Datensätze tabellarisch zusammengefasst. Durch arithmetische Mittelwerte der jeweiligen Koordinaten lässt sich der Mittelpunkt der Figur $(0, 0)$ bestimmen:

$$\bar{x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 + 0\cdot 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2}{6} = 0 \text{ und } \bar{y} = \frac{-1+(-\frac{1}{2})\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2 + 1}{6} = 0.$$

Für die mittleren linearen Abweichungen von den arithmetischen Mittelwerten gilt

$$d_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < d_{\bar{y}} = \frac{2}{3}.$$

Hier werden y-Koordinaten breiter als x-Koordinaten gestreut, was durch entsprechende Abstände von dem Mittelpunkt veranschaulicht werden kann.

Geometrie (7+)

In dem Kontext des Sechsecks können vielfältige innergeometrische Fragestellungen aufgeworfen werden, die folgende inhaltliche Bezüge aufweisen:

- besondere Dreiecke und Vierecke;
- Winkelsätze an geschnittenen Parallelen;
- Höhe, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende;
- Mittelsenkrechte in gleichseitigen Dreiecken;
- Innenwinkelsätze für Dreiecke und weitere Vielecke;
- Kongruenzsätze für Dreiecke;
- Satz des Thales;
- Winkelsätze am Kreis;
- Umfang und Flächeninhalt von Vielecken;
- Umfang und Flächeninhalt von Kreis;
- Strahlensätze und Ähnlichkeit;

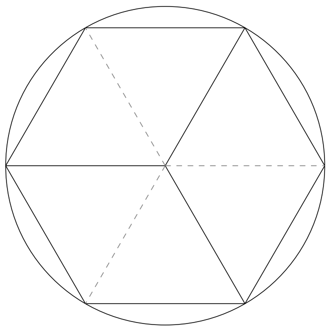


Abbildung 4.33: Würfel

Darüber hinaus kann das regelmäßige Sechseck mit seinen Diagonalen zu Schrägbildern platonischer Körper (Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder und Ikosaeder) modifiziert werden. In der Abbildung 4.33 wird beispielsweise das Schrägbild eines in eine Kugel einbeschriebenen Hexaeders oder Würfels gezeigt. Davon ausgehend lässt sich an stochastische Würfelexperimente anknüpfen.[37]

4.2.2 Erprobungen in Schule und Lehrerfortbildung

Da es aus Platzgründen nicht möglich ist, auf alle Beobachtungen und Ergebnisse einzugehen, werden hier exemplarisch Fragmente ausgewählt, die einerseits das inhaltliche Spektrum der Bezüge erweitern, andererseits Grenzen der didaktisch-methodischen Vorschläge aufzeigen.

[37] Das könnten beispielsweise Experimente mit platonischen Körpern sein, die sich wiederum mit entsprechenden Pythagorasbäumen verbinden lassen.

Schule

Ausgehend von dem mathematischen Kontext und im Hinblick auf die Möglichkeiten konkreter Schülergruppen wurde in Kooperation mit einer Lehrerin ein Aufgabennetz für die 5. Klasse entwickelt. Dieses wurde in verschiedenen fünften Klassen von der Lehrerin sowie in einer Schülergruppe von einem Lehramtsanwärter eingesetzt, der von dieser Lehrerin angeleitet wurde. Die von dem Lehramtsanwärter geleitete Erprobung wurde von Studierenden beobachtet und ausgewertet. Die Erprobung fand am letzten Unterrichtstag der Schüler vor den Sommerferien statt und dauerte eine Doppelstunde. So konnten die Schüler in einer bewertungsfreien Situation ihre Kenntnisse rückblickend vernetzen. Während die Einstiegsaufgabe in Einzelarbeit gelöst werden sollte, wurde für die Bearbeitung der Initialaufgaben die gesamte Lerngruppe in Kleingruppen aufgeteilt. Innerhalb einer Doppelstunde sollten die Aufgaben nicht nur bearbeitet, sondern auch präsentiert werden. Die Entwicklung von eigenen Aufgaben wurde somit zur freiwilligen Hausaufgabe, die von der Lehrperson gewürdigt werden sollte. Im Folgenden werden die Einstiegs- und die Initialaufgaben des Aufgabennetzes vorgestellt.

Die Einstiegsaufgabe bezog sich auf die Abbildung 4.27 und lautete: *Welche Themen aus dem Mathematikunterricht dieses Jahres fallen Dir zu diesem Bild ein?* Sie sollte in Einzelarbeit gelöst werden. Als inhaltliche Bezüge nannten die Fünftklässler in einer der Erprobungen folgende Stichpunkte: Brüche, Symmetrie, verschiedene Flächen und Formen, Vierecke, Winkel (messen), Kreis, kein Körper, Kreisdiagramm. Diese Stichpunkte konnten in den Initialaufgaben aufgegriffen und konkretisiert werden.

Initialaufgaben des erprobten Aufgabennetzes

Aufgabe: Teilbarkeit und Stochastik

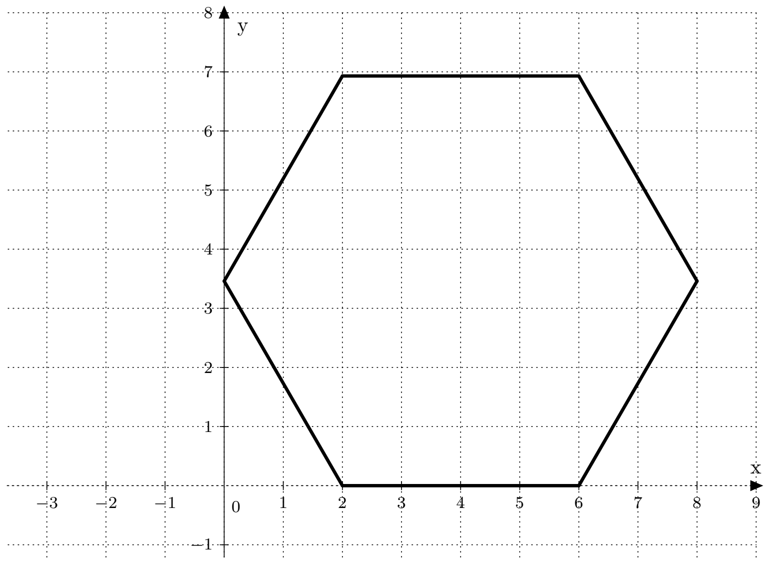
1. Dividiert die Zahlen von 1 bis 360 nacheinander durch 6. Beachtet, welche Reste dabei entstehen.
2. Stellt die Ergebnisse im Kreisdiagramm dar. Vergleicht das Kreisdiagramm mit der Zeichnung zu der Einstiegsaufgabe. Was fällt euch auf? Warum ist es so?
3. Ist es wahrscheinlicher, dass eine Zahl durch sechs teilbar ist, oder dass sie bei der Division durch 6 einen Rest von 1 bis 5 ergibt? Begründet eure Entscheidung.
4. Welche Zahlen kommen häufiger vor, die geraden oder die durch 3 teilbaren? Warum ist es so?

Die erste Aufgabe knüpft an die Behandlung der Teilbarkeitsthematik in der 5. Klasse an. Die Schüler sollen Zahlen von 1 bis 360 auf Teilbarkeit durch 6 untersuchen und das Auftreten von verschiedenen Resten in einer Tabelle und in einem Kreisdiagramm darstellen. Die Zahlen (1-360) sind so gewählt, damit die Schüler besser verstehen, wie ein Kreisdiagramm entsteht. Bei einem Kreisdiagramm werden 360° entsprechend der Anzahl der auftretenden Reste in sechs Sektoren aufgeteilt. Die Anzahl der Reste enspricht genau dann der Gradzahl des zugehörigen Winkels bzw. Kreissektors, wenn die Schüler ohne Fehler teilen. Merken sie, dass jeder Rest genau 60 Mal vorkommt, so können sie ihr Kreisdiagramm sofort in sechs flächeninhaltsgleiche Sektoren unterteilen. Die in der Teilaufgabe 2 erwähnte Figur zu der Einstiegsaufgabe kann ebenfalls auf einen Kreis reduziert werden, der in sechs flächeninhaltsgleiche Sektoren unterteilt ist. Wenn die Schüler beim Teilen Fehler machen, wird ihr Kreisdiagramm von der Figur aus der Einstiegsaufgabe abweichen, weil die Kreissektoren nicht mehr gleiche Flächeninhalte besitzen werden. Die Antworten auf die letzten beiden Teilfragen lassen sich auch durch Kreissektoren veranschaulichen.

Eine andere Gruppe sollte die Zeichnung in dem vorgegebenen Koordinatensystem vervollständigen und untersuchen, wie die Parallelität und Orthogonalität von Strecken sowie die Lage von Eck- und Mittelpunkten durch ihre Koordinaten beschrieben wird.

Aufgabe: Koordinatensystem

1. Ergänzt die Zeichnung so, dass die Figur aus der Einstiegsaufgabe entsteht.

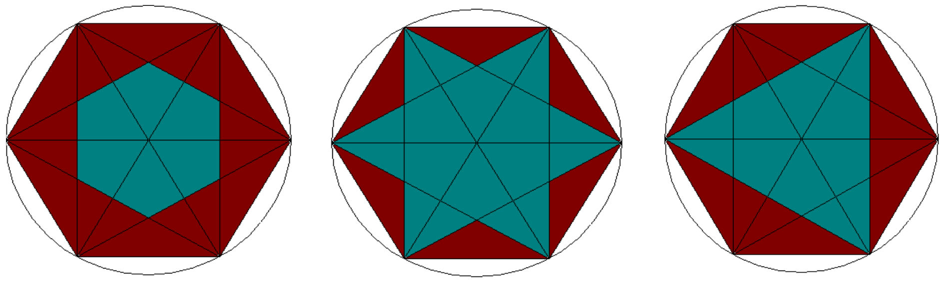


2. Welche Strecken sind parallel zur x-Achse? Welche Strecken sind parallel zur y-Achse? Welche Strecken sind senkrecht zur x-Achse? Welche Strecken sind senkrecht zur y-Achse?
3. Vergleicht eure Ergebnisse aus 2). Welche Gesetzmäßigkeiten könnt ihr entdecken? Warum ist es so?
4. Welcher von den eingezeichneten Durchmessern ist parallel zur x-Achse? Bestimmt Koordinaten der darauf liegenden Eckpunkte und Schnittpunkte. Welche Besonderheiten könnt ihr dabei entdecken?
5. Bestimmt die Koordinaten der Eckpunkte, des Kreismittelpunktes und der Diagonalenschnittpunkte. Könnt ihr dabei etwas Besonderes entdecken?

Die folgende Aufgabe zur Darstellung von Brüchen kann durch das Einzeichnen von Hilfslinien und Einteilen in 36 kongruente Teildreiecke gelöst werden. Da die Kongruenzsätze den Schülern zu diesem Zeitpunkt noch nicht bekannt sind, können sie die Deckungsgleichheit der Teildreiecke nachweisen, indem sie die entsprechenden Teilflächen ausschneiden und übereinander legen. Auch bei der Veranschaulichung der Addition kann das beschriebene enaktive Vorgehen hilfreich sein. Somit wird die in der 6. Klasse einzuführende Addition von Brüchen, der die Erweiterung auf einen gemeinsamen Nenner vorangeht, veranschaulicht.

Aufgabe: Brüche

1. Welche Brüche sind dargestellt?
   Tipp: Unterteile die Figuren weiter.



2. Stellt folgende Brüche dar, indem ihr die entsprechenden Teilfiguren des Sechsecks ausmalt: $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{10}{12}$, $2\frac{1}{2}$
3. Welche weiteren Brüche könnt ihr mit Hilfe des Sechsecks und seiner Teilfiguren darstellen?
4. Erklärt mit Hilfe von Bildern aus 1), wie man Brüche addiert.
5. Welche Brüche könnt ihr darstellen, wenn ihr statt eines Sechsecks ein Rechteck als Ganzes wählt? Sind diese Brüche echt oder unecht? Begründet.

In der folgenden Aufgabe wurden die Schüler aufgefordert, ein Zufallsexperiment durchzuführen und in Form eines Kreisdiagramms zu dokumentieren. Im Vergleich zu dem Kreis aus der Einstiegfsaufgabe und dem Kreisdiagramm aus der Teilbarkeitsaufgabe besteht das Kreisdiagramm an dieser Stelle nicht mehr aus sechs flächeninhaltsgleichen Sektoren, auch wenn das Experiment sechs Ausgänge hat. Aufgrund des relativ kleinen Umfangs der Stichprobe werden die absoluten und relativen Häufigkeiten der einzelnen Augenzahlen sehr wahrscheinlich voneinander abweichen. Somit sollte der Unterschied zwischen den Begriffen *relative Häufigkeit* und *Wahrscheinlichkeit* propädeutisch geometrisch repräsentiert werden.[38]

[38]Durch das Zusammenfassen von Ergebnissen von zwei bzw. vier Schülern wird die Stichprobe vergrößert. Demzufolge kann für jede Zeile der Tabellen ein Kreisdiagramm gezeichnet werden. Es lässt sich untersuchen, wie der Umfang der Stichprobe bzw. die Anzahl der Würfe die Vergleich-

Stochastik

1. Werft jeder 90 Mal einen Würfel. Haltet die Augenzahlen in der Tabelle fest.

Augenzahlen	1	2	3	4	5	6	Welche Zahl wurde am häufigsten geworfen?	Welche Zahl wurde am seltensten geworfen?	Wie groß ist die Differenz zwischen den häufigsten und den seltensten Augenzahlen?
Schüler 1									
Schüler 2									
Schüler 3									
Schüler 4									
Anzahl der Zahlen (insgesamt)									

2. Fasst zunächst die Ergebnisse von jeweils zwei Schülern und dann die Ergebnisse der ganzen Gruppe in einer Tabelle zusammen.

Augenzahlen	1	2	3	4	5	6	Welche Zahl wurde am häufigsten geworfen?	Welche Zahl wurde am seltensten geworfen?	Wie groß ist die Differenz zwischen den häufigsten und den seltensten Augenzahlen?
Schüler 1,2									
Schüler 3,4									
Schüler 1,2,3,4									

3. Vergleicht die Ergebnisse der einzelnen Schüler mit den Ergebnissen aus der Partner- bzw. Gruppenarbeit. Begründet Gemeinsamkeiten und Unterschiede.
4. Erstellt ein Kreisdiagramm, in dem die Arbeitsergebnisse der ganzen Gruppe (Schüler 1,2,3,4) dargestellt werden.
5. Vergleicht das Kreisdiagramm mit der Einstiegsaufgabe. Was fällt euch auf?

Die letzten beiden Aufgaben bezogen sich auf geometrische Fragestellungen. Die Lehrperson entschloss sich, beide Aufgaben einer Gruppe zu geben. Die Fragestellungen beziehen sich auf die Figur aus der Einstiegsaufgabe (siehe Abb. 4.27.)

barkeit entsprechender Kreisdiagramme mit geometrischen Darstellungen der Wahrscheinlichkeiten beeinflusst.

Vielecke
Angenommen, der Radius des Kreises beträgt 2 cm.

1. Bestimmt den Flächeninhalt und den Umfang des Sechsecks auf mindestens vier verschiedenen Wegen.
2. Welcher Weg eignet sich am besten? Warum?
3. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Aufgabe zu lösen?

Winkel

1. Nennt Winkelarten, die ihr auf dem Bild entdeckt.
2. Bestimmt die Winkelgrößen. Erklärt eure Lösungswege.
3. Welche Winkel sind gleich groß? Warum?
4. Bestimmt die Innenwinkelsumme verschiedener Dreiecke, Vierecke und Fünfecke. Begründet.
5. Bestimmt den Anteil von verschiedenen Winkeln an dem Vollwinkel als Bruch.

Bearbeitung von Initialaufgaben in Expertengruppen

Die Schüler wählten eine der auf den vorangegangenen Seiten vorgestellten Initialaufgaben aus und wurden dementsprechend in fünf Gruppen eingeteilt. Zu der Arbeit in den Gruppen wurden von Studierenden folgende Beobachtungen dokumentiert:

Gruppe 1 (Teilbarkeit und Stochastik): Die SuS[39] fangen sofort an zu arbeiten, jedoch sind sie zu voreilig und haben die Aufgabe nicht richtig gelesen, so dass sie die Aufgabe falsch bearbeiten. Erst nach Hinweisen der betreuenden Lehrer wissen 2 SuS, was zu tun ist und erklären es ihren Mitschülerinnen. Diese führen lediglich die Anweisungen ihrer Mitschülerinnen aus und verstehen nicht, wozu dies gut sei. Die SuS teilen sich die Zahlen auf, so dass jeder 90 Zahlen betrachtet. Sie stellen dazu eine Tabelle auf, in der sie die Zahlen in einer Spalte und die Reste, die bei der Division durch 6 bleiben, in die andere Spalte eintragen. Zum einen tragen die SuS die Zahlen in die Spalten des Arbeitsblattes und nicht die Anzahl der Zahlen ein. Hier geht sehr viel Zeit verloren, da sie aufeinander warten müssen, da nur einer schreiben kann. Die SuS benötigen dafür so lange, dass sie es gar nicht schaffen, die verbleibenden Aufgaben zu bearbeiten bzw. den Sinn hinter dieser Aufgabe zu sehen.

Gruppe 2 (Koordinatensystem): Den SuS fällt die Aufgabe leicht und sie wissen sofort, was zu tun ist. Ihnen gelingt es, ohne Hilfe alle Aufgaben zu lösen. Sie diskutieren gemeinsam über die Ergebnisse und deren Darstellung und korrigieren sich ggf. gegenseitig. Sie setzen Farben zur Beantwortung der Aufgaben auf dem AB[40] gezielt ein und stellen Beziehungen der Aufgaben her. So verwenden sie gleiche Farben für die Aufgaben 2 und 3 bzw. 1 und 4 und haben schon vor dem Lesen der 5. Aufgabe den Zusammenhang der Aufgaben erkannt. Sie stellen schnell die Verbindung zwischen der Geometrie und

[39] Hiermit sind Schülerinnen und Schüler gemeint. Die Bezeichnung weicht von der in der Arbeit üblichen ab, sie wurde original aus dem Hospitationsprotokoll übernommen.
[40] Die Abkürzung *AB* wurde für Arbeitsblatt verwendet.

den dazugehörigen Koordinaten der gegebenen Punkte her. Sie haben jedoch Probleme ihre richtigen Gedanken in Worte zu fassen. Außerdem konnten sie sich nicht mehr an die Figur aus der Einführung erinnern und brauchten Hilfe. Diese SuS werden vorzeitig fertig und bereiten ihre Präsentation am SMART-Board vor.

Gruppe 3 (Brüche): Diese Gruppe handelt überlegt und strukturiert. Die SuS gliedern die Figuren in weitere Teile und erhalten 36 Teile. Dazu nummerieren sie die Dreiecke durch, um die Anzahl zu bestimmen. Für die Aufgabe 2 erweitern sie die Brüche, um im Nenner 36 zu erhalten und malen die entsprechende Anzahl von Dreiecken aus dem Zähler aus. Sie versuchen teilweise ein Muster zu erzeugen. Sie stellen fest, dass man alle echten Brüche darstellen kann. Zur Beantwortung der 4. Aufgabe erklären sie nur, wie man Brüche addiert, aber nicht anhand der Bilder. Sie stellen somit keinen Zusammenhang zwischen geometrischen Objekten und Brüchen her. Zur Beantwortung der letzten Aufgabe fehlt ihnen die Zeit.

Gruppe 4 (Stochastik): Die SuS würfeln und reduzieren auf 50 mal pro Schüler. Den SuS ist unklar, was mit der Differenz gemeint ist, wie viele Zahlen zwischen den häufigsten und seltensten Werten liegen oder die konkrete algebraische Differenz der Zahlen. Da die SuS nicht mehr wissen, wie man ein Kreisdiagramm anfertigt und daher nicht mehr am Ende genügend Zeit haben, um das Kreisdiagramm zu zeichnen, können sie auch nicht die Aufgabe 5 bearbeiten bzw. die Verbindung der Stochastik zur Geometrie herstellen.

Gruppe 5 (Vielecke und Winkel): Diese Gruppe beginnt mit den Winkeln, da sie auf Anhieb nicht wissen, wie sie die Vieleck-Aufgabe bearbeiten sollen. Die SuS haben nicht die nötigen Vorkenntnisse, um die Aufgabe zu bearbeiten und sagen lediglich, dass „alle Winkel“ vorhanden sind. Zur Bestimmung der Winkelgrößen haben die SuS das Geodreieck verwendet und gemessen, anstatt diese durch Überlegen oder Rechnen zu ermitteln (auch wenn dies in der Auswertung anders steht). Sie haben weiter nicht erkannt, dass die 3. Aufgabe auf die Scheitelwinkel und Nebenwinkel bzw. Symmetrie abzielte. Die Aufgabe 4 haben sie durch Probieren und Messen gelöst und die Aufgabe 5 bearbeiten sie gar nicht.

Für die Vieleckaufgabe bleiben nur noch 10 Minuten. Hier versuchten sie zwar die Aufgabe zu bearbeiten, konnten aber keine sinnvollen Ergebnisse finden. Dies lag vor allem an dem Zeitdruck und dem unüberlegten hektischen Handeln. Sie haben lediglich die Idee, dass man das Sechseck mit gleichgroßen Quadraten (Flächeninhalt bekannt) füllen kann und anschließend die Quadrate zählt, um ungefähr den Inhalt zu bestimmen.

Präsentations- und Auswertungspahse

Nach der Gruppenarbeitsphase folgte eine Auswertungs- und Präsentationsphase, in der jede Gruppe ca. 10 Minuten für die Vorstellung der Ergebnisse erhielt. Im Folgenden wird der entsprechende Ausschnitt aus dem Hospitationsprotokolle derselben Studentin aufgeführt, die auch die zuvor wiedergegebenen Ausschnitte aus dem Hospitationsprotokoll anfertigte.

Gruppe 1 (Teilbarkeit und Stochastik): Diese Gruppe verwendet das SMART-Board und erklärt anhand des vergrößerten Arbeitsblattes die Aufgaben und ihr Vorgehen. Sie fassen zusammen, dass sie ein Muster festgestellt haben, d.h., dass sich die Reste immer alle 6 Zahlen in der gleichen Reihenfolge wiederholen. Sie geben als Tipp die Anzahl der zu betrachtenden Zahlen zu verringern. Außerdem sollte das AB geteilt werden.
Gruppe 2 (Koordinatensystem): Diese Gruppe verwendet das SMART-Board zur Präsentation der Ergebnisse. Sie zeichnen dazu die Einführungsfigur nach und generieren schrittweise ihr Tafelbild durch die Beantwortung der einzelnen Aufgaben. Sie haben das Verhältnis zwischen den senkrechten und parallelen Strecken im Koordinatensystem kennen gelernt und sich in Erinnerung gerufen, dass es unendlich viele Durchmesser in einem Kreis gibt.
Gruppe 3 (Brüche): Die SuS erklären kurz das Vorgehen bei der Addition von Brüchen. Sie erklären weiter, dass man unechte Brüche erhalten würde, wenn man mehrere Sechsecke betrachten würde.
Gruppe 4 (Stochastik): Diese Gruppe hat den Tipp gegeben, die Überschrift „Glücksspiele" zu wählen, da diese besser an das Vorwissen der SuS anknüpft. Sie stellen fest, dass die Zahlen, die am häufigsten gewürfelt werden, immer variieren, da es sich um „Glück" handelt. Sie argumentieren auch mit der Gleichwahrscheinlichkeit.
Gruppe 5 (Vielecke und Winkel) Die SuS wissen nicht, wie sie ihre Ergebnisse präsentieren sollen und vertreten nicht mehr ihre Ergebnisse der Aufgaben. Nach einer kurzen Pause vor der Tür stellen sie eine Methode vor, wie man den Flächeninhalt des Sechsecks bestimmen kann.

Die Ergebnisse der Erprobung zeigen, dass sowohl die in den Aufgaben angesprochenen inhaltlichen Bezüge wie auch die gewählte Sozialform Potenzial zur Gestaltung eines „vernetzenden Unterrichts" aufweisen, jedoch weiter überarbeitet werden müssen. Die Aufgabenstellungen zur Teilbarkeit und Stochastik sowie zu den Vielecken und Winkeln bedürfen beispielsweise einer weiteren Konkretisierung. Einige weitere Aufgabenstellungen (beispielsweise Vergleich der Figur aus der Einstiegsaufgabe mit dem Kreisdiagramm) konnten teilweise nicht behandelt werden, weil das nötige Vorwissen bei den Schülern nicht verfügbar war. Erfolgreicher waren beispielsweise die Beschäftigung mit dem Koordinatensystem und die Beschreibung von Parallelität und Orthogonalität mit Hilfe von Koordinaten. Die dafür nötigen (über die Vorgaben des Berliner Rahmenlehrplans für die Doppeljahrgangsstufe 5/6 hinausgehenden) Zusammenhänge wurden von den Schülern hergestellt. Verknüpfungen von geometrischen Darstellungen und Brüchen wurden von den Schülern ebenfalls entsprechend dem Niveau der Klassenstufe 5[41] erfolgreich gemeistert. Aus diesem Grunde liegt es nahe, die Aufgabenstellungen weiter zu optimieren und auf andere Doppeljahrgangsstufen der Sekundarstufe I zu erweitern. Als Ideenquelle für die Optimierung der Aufgaben können auch Schüleraufgaben dienen.

Eigene Aufgaben der Schüler

Im Folgenden werden drei Aufgaben, die Schüler im Anschluss an die Erprobung selbst entwickelten, vorgestellt. Beispielsweise fragten sie ihre Mitschüler nach den Brüchen,

[41] Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Brüchen werden meistens erst in der 6. Klasse explizit besprochen.

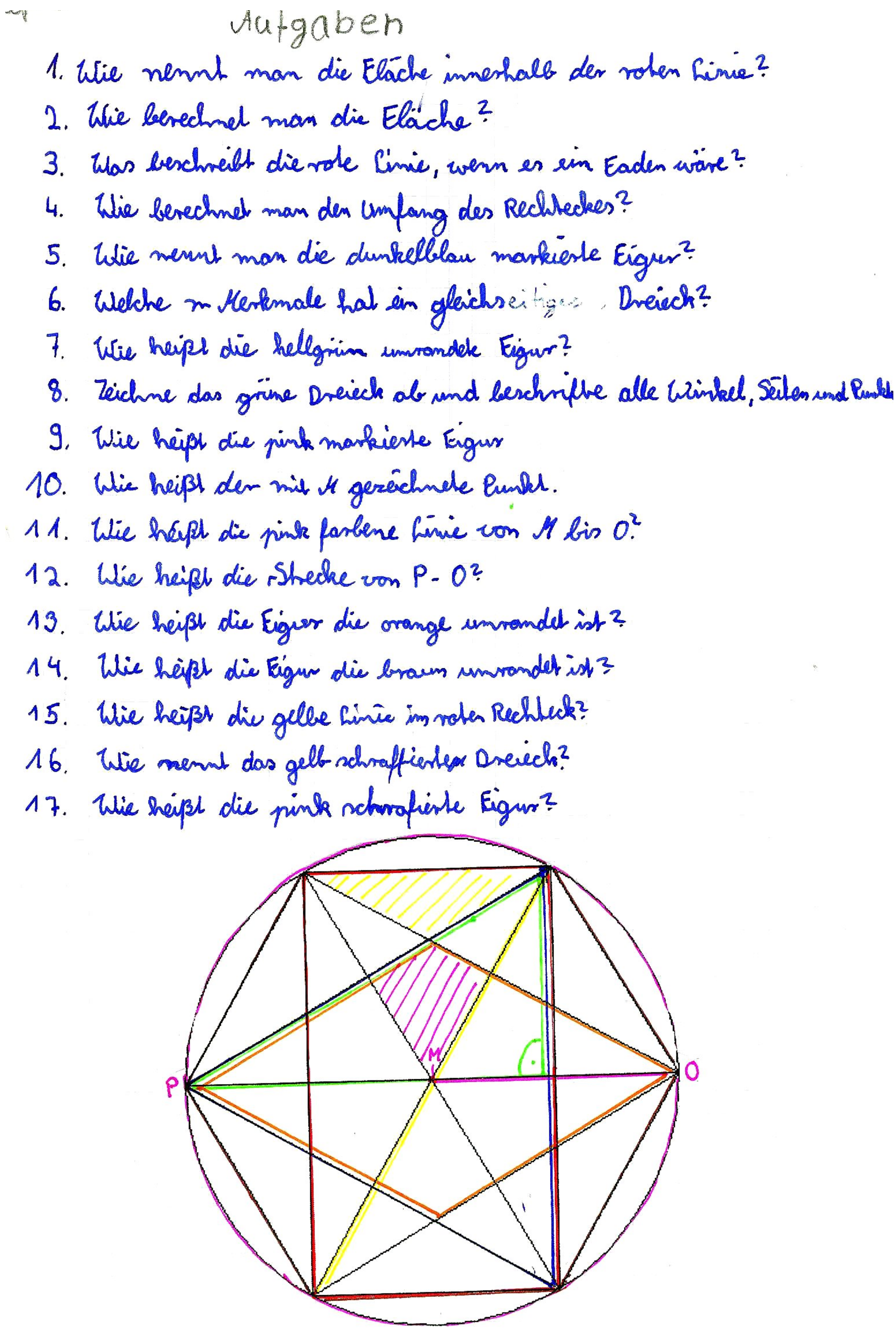


Abbildung 4.34: Eigene Aufgabe: 17 Fragen

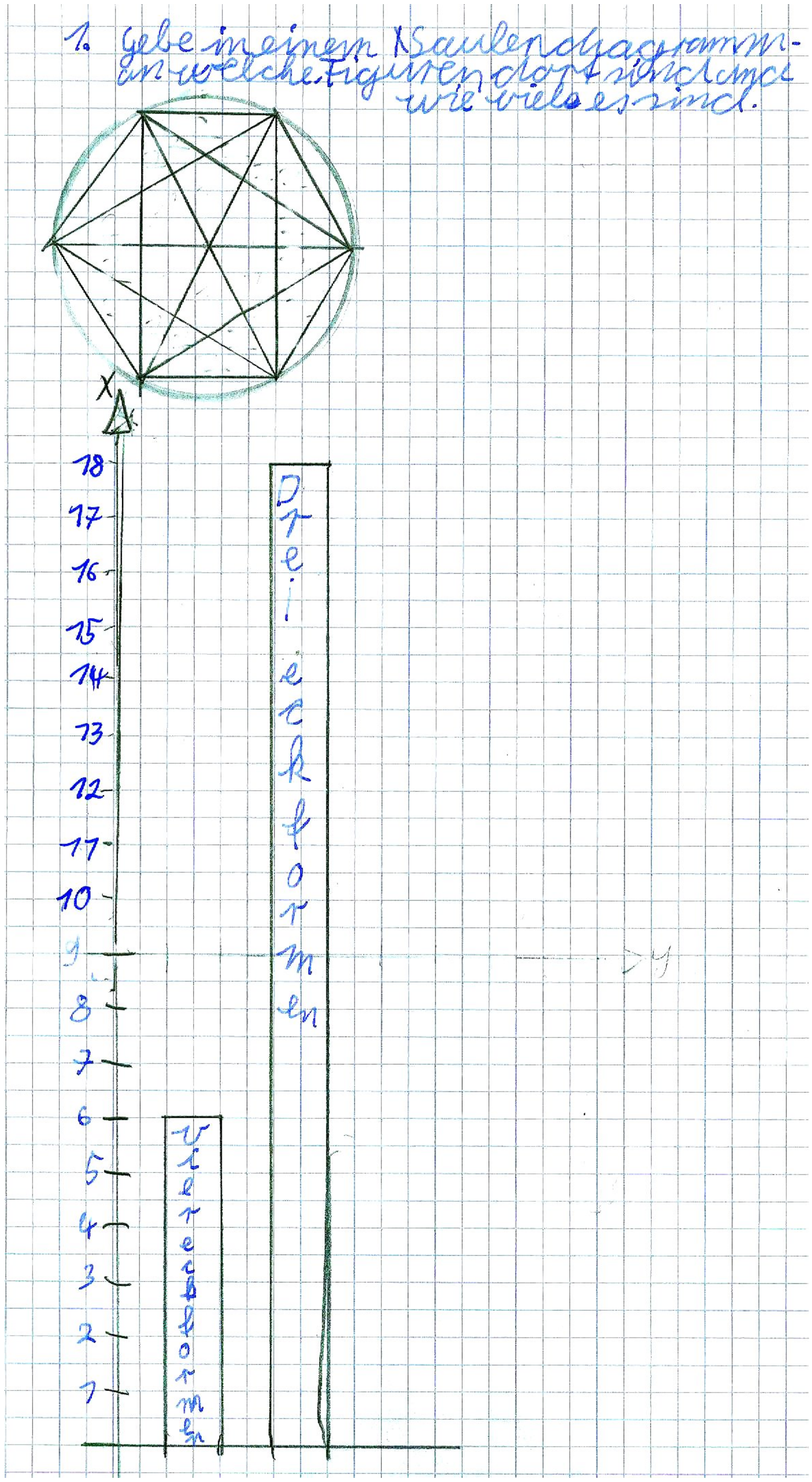


Abbildung 4.35: Balkendiagramme

die durch Flächen in der Abbildung 4.36 (S. 197) dargestellt sind. Um die Aufgabe zu stellen, haben die Schüler nicht das dafür vorgefertigte Hilfsblatt benutzt, sondern selbst mehrere in einem Kreis einbeschriebene Sechsecke gezeichnet. Hier werden durch Zeichnungen eigene (von den Lehrpersonen unerwartete) Verbindungen hergestellt.

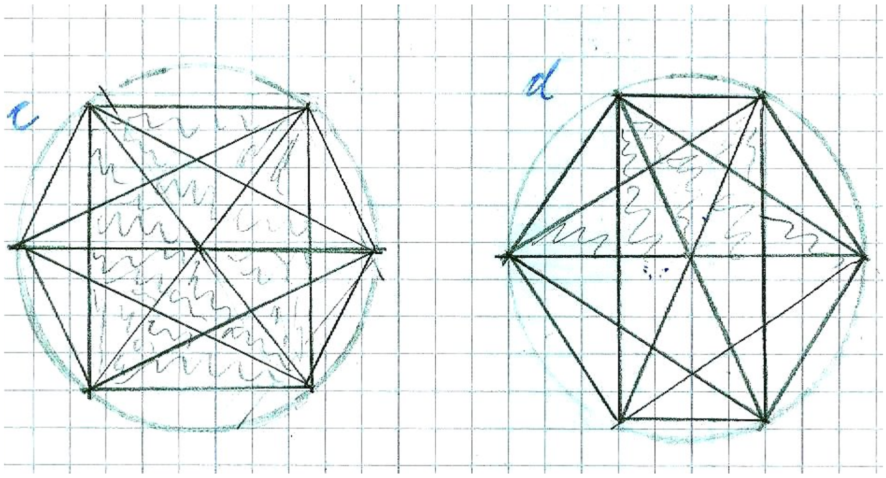


Abbildung 4.36: Neue Brüche

Im Gegensatz dazu wurde in der nächsten Aufgabe (siehe Abb. 4.34, S. 195) siebzehn Fragen zu der vorgefertigten Zeichnung gestellt. Diese Fragen betreffen vor allem die Identifikation von Begriffen und Eigenschaften. Sie bleiben im Kontext der Geometrie.

In der Aufgabe von Boris (siehe Abb. 4.35) soll die gegebene geometrische Figur zum Gegenstand einer Untersuchung werden, die mit Hilfe von statistischen Darstellungen (Balkendiagrammen) gezeigt werden soll. Leider findet er nicht alle Dreiecke und Vierecke, die in der Figur versteckt sind. Doch die Idee, auf diese Weise Geometrie mit Statistik zu verbinden, ist originell und war für die Lehrperson ebenfalls unerwartet. Genau das ist nach Hischer ein wesentliches Merkmal eines „vernetzenden Unterrichts“, in dem die Schüler selbst Verbindungen zwischen verschiedenen Inhalten herstellen.

4.2.3 Konstruktion von Aufgaben in der Lehrerfortbildung

Das vorgestellte Aufgabennetz wurde um Fragestellungen für höhere Klassenstufen ergänzt und im Rahmen einer Lehrerfortbildung auf der MNU-Tagung in Berlin am 8.09.2011 Lehrern, die in den Sekundarstufen I und II unterrichten, vorgestellt und mit ihnen überarbeitet. Bei der Überarbeitung sollten die Lehrer in Paaren zusammenarbeiten und die Aufgaben an ihnen bekannte Schülergruppen anpassen. Im Folgenden werden die dabei entwickelten Initialaufgaben vorgestellt und anschließend kommentiert. Sie sollen eine Idee dafür geben, wie die Hinweise aus der Potenzialanalyse als Aufgabenstellungen realisiert werden können.

Die kooperierenden Lehrer erachteten das Vernetzen von Unterrichtsinhalten für wichtig. Sie waren sehr motiviert, die Aufgaben mitzugestalten und in ihrem Unterricht auszuprobieren, weil sie den gewählten mathematischen Kontext interessant fanden. Auf der fachinhaltlichen Ebene ergab sich aus dem Austausch, dass das Herstellen von Verbindungen durch die Grenzen der Rahmenlehrplanvorgaben der jeweiligen Klassenstufen erschwert ist. So werden bis zur 8. Klasse überwiegend proportionale und lineare Funktionen und Zuordnungen thematisiert. Darüber hinaus müssen bei Aufgabenstellungen die den Schülern bekannten Zahlbereiche berücksichtigt werden. So werden beispielsweise in Berlin negative Zahlen meistens in der 7. Klasse und irrationale Zahlen erst in der 9. Klasse eingeführt. Dies erschwert beispielsweise die Beschäftigung mit Koordinatengeometrie bis zur 8. Klassenstufe. Die dabei im Kontext des Sechsecks vorkommenden irrationalen Längen müssen dann durch Brüche angenähert werden. Aus der Sicht der Lehrer würde die Annäherung von irrationalen Zahlen durch Brüche die Motivation für die Einführung von irrationalen Zahlen auf späteren Klassenstufen erschweren. Deshalb würden die Lehrer die Aufgaben 5 und 6 (S. 203) erst ab der 9. Klasse verwenden.

Auch die Aufgaben zu stochastischen Inhalten (S. 201) würden die Lehrer eher später einsetzen, weil sie in der Regel nicht einschätzen können, wie gut ihre Schüler nach dem Abschluss der Grundschule mit Elementen der Stochastik vertraut sind. Hinsichtlich der Aufgabe, die sich auf Würfel-Experimente bezieht (S. 191), schlugen die Lehrer vor, die Schüler noch vor dem Würfeln nach einer Prognose zu fragen, um diese anschließend mit den Ergebnissen des Experiments zu vergleichen. Auf diese Weise würden Unterschiede zwischen den Begriffen *relative Häufigkeit* und *Wahrscheinlichkeit* durch Experimente und Zeichnungen repräsentiert.

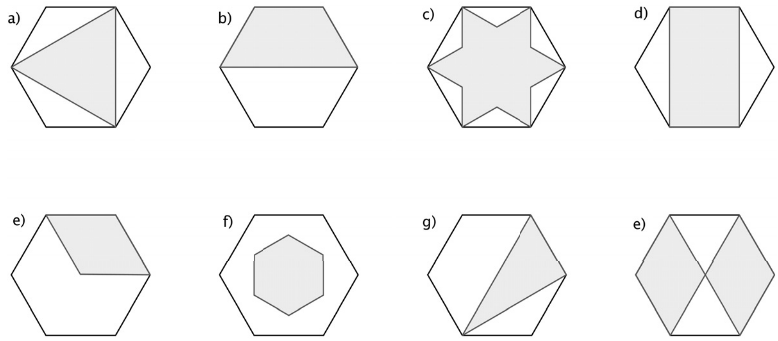
Außerdem fanden die Lehrer wichtig, dass in den Aufgaben Funktionen thematisiert werden, deren Graphen aus isolierten Punkten bestehen, wie in den Aufgaben 5, 6, und 8 (S. 203, S. 204). Somit wären die Schüler an Zahlenfolgen, die möglicherweise später im Unterricht thematisiert werden, herangeführt.

Etwas zurückhaltender waren die Lehrer in Bezug auf den Einsatz der Aufgaben in Gruppenarbeit. Fast alle Lehrer haben aus den Gruppenarbeitsaufträgen Einzelarbeitsaufträge formuliert. Die Bearbeitung der Aufgaben in Gruppen assoziierten die Lehrer mit ineffektiv genutzter Zeit. Die Erprobung des Aufgabennetzes bei Schülern zeigte auch, dass nicht alle Gruppen die Zeit effektiv nutzen konnten (S. 192). Auf der anderen Seite wurde im Kapitel 3 gezeigt, dass eine Kooperation unter Schülern gerade beim Lösen mathematischer Probleme wichtig sein kann.

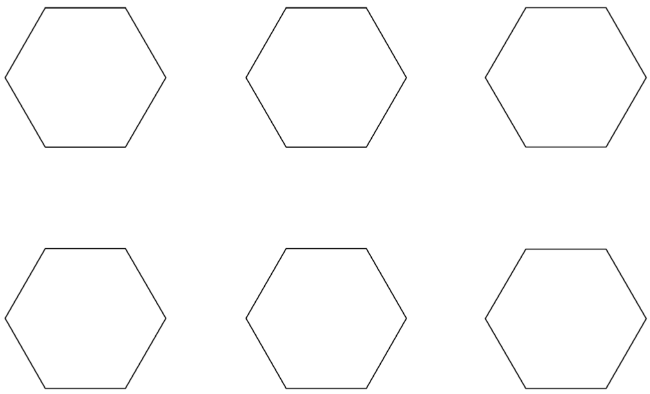
Um die Diskrepanz zwischen theoretischen Erkenntnissen und Situationen in der Praxis zu überwinden, wären weitere, über die gemeinsame Entwicklung der Aufgaben mit den Lehrern hinausgehende Schritte notwendig. Dafür müsste genauer untersucht werden, warum die meisten Lehrer Gruppenarbeit im Mathematikunterricht mit Vorsicht betrachten. Ausgehend davon könnte überlegt werden, wie sie beim Einsatz von entwickelten Materialen in Gruppenarbeit unterstützt und bei der Entwicklung von eigenen Materialien entlastet werden könnten. Die Lehrer schätzten den Einstieg und den Bezug zu einer geometrischen Figur, überarbeiteten jedoch die textliche Gestaltung der Aufgaben. Dies führte an vielen Stellen zu Ergänzungen der Aufgabenstellungen mit weiteren Zeichnungen. Diese Zeichnungen stellen verschiedene Variationen der Einstiegsfigur dar. In den meisten Fällen handelt es sich um innermathematische Modellierungen. Das waren vor allem geometrische Visualisierungen von Brüchen, negativen und irrationalen Zahlen, Grenzprozessen, Wahrscheinlichkeiten sowie Anwendungen von stochastischen, arithmetischen und algebraischen Mitteln sowie Funktionen und Zuordnungen auf geometrische Probleme. Insbesondere die Aufgabenstellungen zu Elementen der Statistik enthielten aber auch Einkleidungen in außermathematische Situationen (z.B. Dartscheiben). Wie in 3.4 ausgearbeitet, wurde hiermit gezeigt, wie sich durch Stringenz und Linearität mathematischer Texte entstandene Kommunikationsschwierigkeiten durch ikonische Sprachmittel der Geometrie zumindest teilweise überwinden lassen. Zum Abschluss des Abschnittes folgen exemplarisch ausgewählte, in Kooperation mit den Lehrern entwickelte, Aufgaben.

Aufgabe 1 (5+)

1. Gib die maximale Anzahl der Diagonalen in einem Sechseck an.
2. Es entsteht eine Reihe einfacher Figuren, wenn man nur einige Diagonalen oder Teile von ihnen zeichnet. Benenne die in der Abbildung entstandenen geometrischen Figuren. Begründe Deine Entscheidungen mithilfe der besonderen Eigenschaften dieser Figuren.

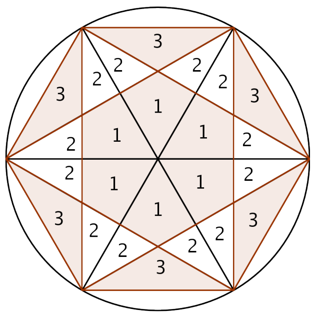


3. Gib die Anteile der Flächeninhalte der gefärbten Flächen am Flächeninhalt des Sechsecks in a) bis e) als Brüche an.
4. Zeichne in die vorgegebenen Sechsecke Deine eigenen Figuren ein. Markiere sie farbig.



5. Gib auch für Deine Figuren die Anteile der Flächeninhalte der gefärbten Flächen am Flächeninhalt des Sechsecks als Brüche an.

Aufgabe 2 (7+)
Aus einer Kreisfläche, die wie in dem Bild dargestellt eingeteilt ist, wird zufällig ein Punkt herausgegriffen.



1. Schätze die Wahrscheinlichkeiten für einen Treffer im Bereich 1, 2 bzw. 3.
2. Untersuche, ob die Trefferwahrscheinlichkeiten sich besser durch Innenwinkelsummen, durch Umfänge oder durch Flächeninhalte der entsprechenden Felder bestimmen lassen.
3. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für einen Treffer im Bereich 1, 2 bzw. 3. Beachte dabei die Ergebnisse aus der Teilaufgabe 2.
4. Vergleiche Deine Ergebnisse aus 1. und 3.: Wie genau hast Du geschätzt?

Zu der Aufgabe 2 wurde eine alternative Variante (2A) entwickelt. Sie stellt ein Versuch dar, das Problem der mathematischen Modellierung mit Hilfe einer passenden Einkleidung zu lösen.[42]

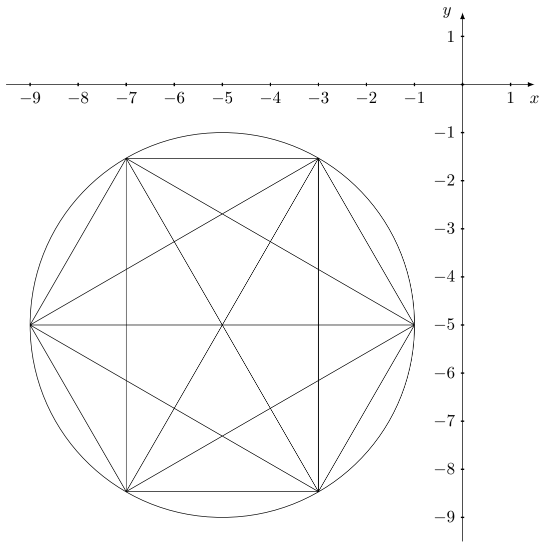
[42] **Aufgabe 2A (7+)**
Wir betrachten einen ungeübten Bogenschützen, der auf eine kreisrunde Zielscheibe mit dem Radius 1m schießt. Nur Versuche, bei denen der Schütze die Zielscheibe trifft, werden berücksichtigt. Die Zielscheibe hat das Muster wie in dem Bild.

1. Schätze die Wahrscheinlichkeiten für einen Treffer im Bereich 1, 2 bzw. 3.
2. Untersuche, ob die Trefferwahrscheinlichkeiten sich besser durch Innenwinkelsummen, durch Umfänge oder durch Flächeninhalte der entsprechenden Felder bestimmen lassen.
3. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für einen Treffer im Bereich 1, 2 bzw. 3. Beachte dabei die Ergebnisse aus der Teilaufgabe 2. Vergleiche die Ergebnisse mit Deinen Schätzungen. Wie genau hast Du geschätzt?

Aufgabe 3 (8+)

1. Zeichne das Ausgangssechseck aus der Einstiegsaufgabe so in ein Koordinatensystem, dass sein Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Dabei soll der Radius des Kreises 4 LE beitragen.
2. Bezeichne die Eckpunkte und Schnittpunkte der Sechsecksdiagonalen mit Großbuchstaben. Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte des inneren und des äußeren Sechsecks.
3. Die gesamte Figur wird ...
   - ... um 3 Einheiten nach rechts verschoben.
   - ... um 3 Einheiten nach oben verschoben.
   - ... an der x-Achse gespiegelt.
   - ... an der y-Achse gespiegelt.

   Führe die oben beschriebenen Bewegungen aus.
4. Gib die Koordinaten der Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks für jede Bewegung an, die Du in 3. ausgeführt hast.
5. Durch Kombination von Bewegungen ist folgendes Bild entstanden:

   Beschreibe mit Worten, wie die Koordinaten durch die einzelnen in 5 ausgeführten Bewegungen sich ändern.
6. Formuliere eine allgemeine Regel für die Veränderung der Koordinaten durch Spiegelungen und Verschiebungen der Ausgangsfigur. Gehe dabei von der Lage der Ausgangsfigur wie in 1 beschrieben aus.

Aufgabe 4 (8+)

1. Zeichne die gesamte Figur (einschließlich der Teilfiguren) so in ein Koordinatensystem, dass ihr Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems und einer der eingezeichneten Durchmesser auf der x-Achse liegt.
2. Markiere alle Strecken aus 1., die parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Arbeite mit zwei Farben. Gib Gleichungen für entsprechende Geraden an und begründe Deine Angaben.
3. Entscheide und begründe, welche der Gleichungen aus 2. als Funktionsgleichungen gesehen werden können.
4. Entscheide und begründe, ob die Kreislinie der Graph einer Funktion ist.
5. Stelle lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen auf, deren Lösungen den Eckpunkten des größeren Sechsecks entsprechen.

Aufgabe 5 (8+)

1. Markiere farbig möglichst viele Vielecke, die Du in dem Bild zur Einstiegsaufgabe erkennen kannst.
2. Beschreibe den Zusammenhang zwischen der Innenwinkelsumme eines Vielecks und der Anzahl seiner Ecken mit Worten, mit Hilfe einer Tabelle, eines Graphen und eines Terms.
3. Die Zuordnung *Anzahl der Ecken → Innenwinkelsumme* wird durch eine Funktion beschrieben. Gib eine Funktionsgleichung an und benenne die Funktionsart.
4. Beweise den Innenwinkelsummensatz für Dreiecke und begründe ausgehend davon die in 2. erarbeitete Formel.

Aufgabe 6 (9+)

1. Gegeben sei der Kreis mit dem Sechseck aus der Einstiegsaufgabe. Markiere farbig jeweils ein Dreieck, ein Viereck, ein Sechseck und ein Fünfeck so, dass deren Eckpunkte auf dem Kreis liegen.
2. Untersuche den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Diagonalen eines Vielecks und der Anzahl seiner Ecken und beschreibe den Zusammenhang mit Worten.
3. Fertige dazu anhand der Vielecke aus 1. eine Tabelle an und zeichne einen Graphen für die Zuordnung *Anzahl der Ecken → Anzahl der Diagonalen*.
4. Vermute die Anzahl der Diagonalen für ein Sechseck, Achteck und Zwölfeck.
5. Gib eine Funktionsgleichung an, die den betrachten Zusammenhang beschreibt und benenne die Funktionsart. Gib den Definitionsbereich der Funktion an.
6. (11+)] Beweise die Formel aus 5. mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 7 (9+)
In der Zeichnung zur Einstiegsaufgabe sind ähnliche Figuren zu entdecken.

1. Erläutere, was Du unter Ähnlichkeit verstehst.
2. Markiere in der Abbildung zueinander ähnliche Figuren. Begründe, dass diese Figuren ähnlich zueinander sind.
3. Bestimme die Ähnlichkeitsfaktoren ausgehend von dem Original. Dabei sei die Figur mit dem kleinsten Flächeninhalt als Original anzusehen.
4. Es gibt Ähnlichkeitsfaktoren, die irrational sind. Führe für einen dieser Faktoren einen Beweis.

Hinweis: Orientiere Dich am Vorgehen zum Nachweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

Aufgabe 8 (10+)
Im Inneren des großen Sechsecks entsteht durch die Schnittpunkte der Diagonalen ein kleineres Sechseck. Auf diese Art kann man das Einzeichnen von Sechsecken immer weiter wiederholen.

1. Zeichne in das Bild aus der Einstiegsaufgabe drei weitere Sechsecke ein. Gehe wie oben beschrieben vor. Markiere die entstandenen Sechsecke.
2. Untersuche den Zusammenhang zwischen ...
   - ... *Anzahl der Wiederholungen* $\rightarrow$ *Flächeninhalt des inneren Sechsecks*
   - ... *Anzahl der Wiederholungen* $\rightarrow$ *Umfang des inneren Sechsecks*

   Halte die Ergebnisse in einer Tabelle fest.
3. Zeichne zu den Wertepaaren für die Zuordnung *Anzahl der Wiederholungen* $\rightarrow$ *Flächeninhalt des inneren Sechsecks* entsprechende Punkte in ein Koordinatenssytem und ermittle dafür eine Funktionsgleichung.
4. Zeichne zu den Wertepaaren für die Zuordnung *Anzahl der Wiederholungen* $\rightarrow$ *Umfang des inneren Sechsecks* entsprechende Punkte in ein Koordinatenssytem und ermittle dafür eine Funktionsgleichung.
5. Beschreibe die Graphen aus 2. und 3.
6. (*)Zeichne zu den Funktionen aus 3. und 4. den Graphen der Umkehrfunktionen, sofern sie existieren. Ermittle die entsprechenden Funktionsterme. Interpretierte die Umkehrfunktionen bezogen auf den konkreten Sachverhalt.

Aufgabe 9 (9+)

1. Im Bild zur Einstiegsaufgabe ist durch geschicktes Hervorheben bestimmter Strecken ein *Tetraeder* zu erkennen. Zeichne seine Kanten nach.
2. Versuche, einen weiteren Dir bekannten Körper im Bild zur Einstiegsaufgabe zu entdecken. Zeichne die Kanten dieses Körpers nach und benenne ihn.
3. Überlege, wie Du Höhen und Flächen der Körper aus den vorangehenden Teilaufgaben ausgehend von den Kantenlängen berechnen kannst.

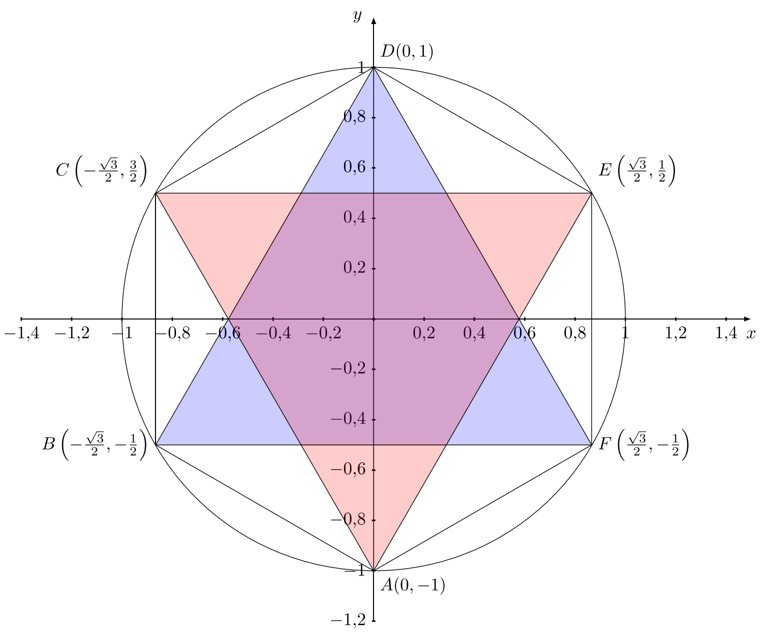
- Skizziere dafür Seitenflächenhöhen und Körperhöhen.
- Skizziere die Seiten der Flächen in wahrer Größe/verkürzter Größe.

Aufgabe 10 (10+)

1. Bestimme mit Hilfe der Abbildung zu der Einstiegsaufgabe $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ für $\alpha = 30°, 60°, 90°, 120°, 180°$ und $360°$. Halte Deine Ergebnisse in einer Tabelle fest. Beweise Deine Ergebnisse.
2. Wir betrachten den Radius des Umkreises des Sechsecks als Sekundenzeiger einer Uhr. Gib die Winkelgrößen für eine Minute im Fünf-Sekunden-Takt an. Bestimme die Winkelgrößen für eine zweite Minute ebenfalls im Fünf-Sekunden-Takt. Ermittle nun alle entsprechenden Werte für $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.
3. Erstelle eine weitere Tabelle für die 3. Minute und vermute unter Zuhilfenahme von 2. die entsprechenden Sinus- und Cosinuswerte.
4. Vergleiche die einzelnen Sinuswerte untereinander. Vermute einen Zusammenhang.
5. Vergleiche die Sinuswerte mit den Cosinuswerten. Welchen Zusammenhang erkennst Du hier?
6. Begründe Deine Ergebnisse aus den obigen Teilaufgaben mit Hilfe der Funktionsgraphen und mit Hilfe der Werte aus den Tabellen.

Aufgabe 11 (9+)

Wir können die x- und y-Koordinaten der Eckpunkte des Sechsecks wie im Bild unten als zwei unterschiedliche statistische Datensätze untersuchen und vergleichen. Wir nennen diese x-Datensatz und y-Datensatz.



1. Die absoluten und relativen Häufigkeiten des x-Datensatzes lassen sich in der unten stehenden Tabelle zusammenfassen. Fertige eine entsprechende Tabelle für den y-Datensatz an.

x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$H(x_i)$	2	2	2
$h(x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

2. Bestimme das arithmetische Mittel für den x-Datensatz. Was bedeutet dies geometrisch?
3. Gib die Spannweite des x-Datensatzes an.
4. Berechne die mittlere lineare Abweichung vom arithmetischen Mittel für den x-Datensatz.
5. Berechne die Standardabweichung für den x-Datensatz bezogen auf das arithmetische Mittel.
6. Untersuche analog zu den vorangegangenen Teilaufgaben den y-Datensatz. Bestimme dafür die entsprechenden Kenngrößen.
7. Begründe Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Datensätze geometrisch.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Im Folgenden werden die in der vorliegenden Arbeit erzielten Forschungsergebnisse zusammengefasst, und es wird ein Ausblick auf anschließende Forschungsmöglichkeiten gegeben. Zunächst werden Beiträge für die Entwicklung von methodischen Zugangsweisen in der Mathematikdidaktik vorgestellt (vgl. 5.1) und anschließend die auf der theoretischen und auf der fachinhaltlichen und praktischen Ebene gewonnene Erkenntnisse resümiert (vgl. 5.2, 5.3). Schließlich folgt ein kurzer Ausblick auf Möglichkeiten weiterer Forschung (vgl. 5.4).

5.1 Weiterentwicklung mathematikdidaktischer Forschungsmethoden

Die forschungsmethodischen Besonderheiten der vorliegenden Arbeit bestehen in dem Zugang zu didaktischen Phänomenen über Metaphern, in Illustrationen von theoretischen Erkenntnissen durch praktische Erprobungen und in der Akzentverschiebung praxisreflektiver Zugänge.

5.1.1 Zugang zu mathematikdidaktischen Phänomenen über Metaphern

Um dahinter stehende pädagogisch-didaktische Phänomene zu beschreiben, wurden in ausgewählten deutschsprachigen Texten zur Fusion, zur Beziehungshaltigkeit und zu Vernetzungen von Klein bis zu aktuellen curricularen Vorgaben fachdidaktische Begriffe als Metaphern betrachtet (vgl. 2.1.1, 2.1.2, 3). Eine Grundlage dafür bildete die Arbeit von Guski (2007), die in einem allgemein-pädagogischen Kontext behauptet, dass das Nachdenken, Sprechen und Schreiben über Lernen ohne Metaphern nicht möglich ist.

Metaphern können im pädagogisch-didaktischen Kontext in ihrer *kognitiven* und *kommunikativen* Funktion auftreten. Wie kam die *kognitive* Funktion der Metaphern in der vorliegenden Arbeit zum Tragen? Es wurde am Beispiel von Beziehungshaltigkeit und Vernetzungen gezeigt, dass auch Mathematikdidaktiker Metaphern verwenden, um das Lernen von Mathematik zu beschreiben oder mathematikdidaktische Modelle zu entwickeln. Dabei können metaphorische Wendungen nicht nur als Vorstufen, Veranschaulichungen und Mittel der Erkenntnisfindung in der mathematikdidaktischen

Theoriebildung betrachtet werden (vgl. Vollrath 2001, 103, Jablonka und Bergsten 2010, 40f.). Vielmehr können mathematikdidaktische Modelle rückblickend als metaphorische Konzepte aufgegriffen werden, um Einblicke in ihre ideengeschichtlichen Kontexte zu gewinnen. Somit können mathematikdidaktische Modelle mit Hilfe von Metaphern hinterfragt, eventuell relativiert, aber auch modifiziert werden (vgl. 2.1, 2.2).

Nach Guski vermitteln metaphorische Konzepte zwischen zwei Bilddomänen als Ursprungsbereich und Zielbereich. Als Ursprungsdomänen können für den Menschen unmittelbar greifbare und erfahrbare Bereiche (Haus, Baum, menschlicher Körper) auftreten. Auch Fachbegriffe aus verschiedenen Bereichen der Wissenschaft (Biologie, Wirtschaft, Medizin) werden als Metaphern in der Pädagogik verwendet. Auf der anderen Seite betrachten die Mathematikdidaktiker Maier und Schweiger (1999, 59f.) Metaphern (z.B. Körper, Steigung), die aus der Alltagssprache als einem Ursprungsbereich in die mathematische Fachsprache als Zieldomäne integriert worden sind, und diskutieren damit verbundene Konsequenzen für die Sprache der Mathematik. Überraschend kehrt Führer (1998, 506) die Richtung um und betrachtet Mathematik als einen Analogieraum, der auch als Ursprungsdomäne für metaphorische Konzepte aufgefasst werden kann und zur Beschreibung, Untersuchung und Konstruktion von außermathematischen Phänomenen (Jura, Medizin, Wirtschaft, aber auch Didaktik) herangezogen wird.

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass bei der Beschreibung von Phänomenen des Lernens als einem Ursprungsbereich nicht nur Metaphern aus der unmittelbaren Wirklichkeit des Menschen (Skelett, Kette, Spinne, Netz), sondern auch aus der Mathematik verwendet werden, um Beziehungshaltigkeit bzw. Vernetzungen zu beschreiben. So zieht beispielsweise Wittenberg die mathematische Metapher des Vektors heran, um Themenkreise zu beschreiben (vgl. 2.2.5). Auch graphentheoretische Interpretationen des Vernetzens im Mathematikunterricht wären ohne metaphorische Konzepte des Netzes, des Übersetzens, des Knüpfens nicht möglich (vgl. 2.3, 2.4). Eines der Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit besteht in dem Vorschlag, mathematikdidaktische Modelle und ihre Mathematisierungen als metaphorische Konzepte zu betrachten, um diese rückblickend im Hinblick auf ihre praktische Relevanz zu bewerten und auszubauen (vgl. 2.2.2).

5.1.2 Erprobungen mit Schülern als Illustrationen von theoretischen Erkenntnissen

Das kommunikative Potenzial der Netz-Metapher begünstigte den Forschungsprozess bei der Konstruktion von Aufgabennetzen im Austausch mit Lehrern und Schülern. Sowohl die Einstiegs- wie auch die Initialaufgaben, aber auch Überlegungen zu ihrem methodischen Einsatz wurden von Schülern, Studierenden, Lehrern und Didaktikern mitentwickelt. Sie vermittelten zwischen verschiedenen kurz- und langfristigen Interessen dieser Gruppen. Den Schülern wurde somit eine Möglichkeit gegeben, das von ihnen Gelernte zu wiederholen, zusammen zu arbeiten und bei der Erstellung der eigenen Aufgaben [1] ihre Sichtweisen auf den Mathematikunterrichtund die Welt außerhalb davon (mit den Worten von Freudenthal „Schülerwirklichkeit“) zum Ausdruck zu bringen. Die Lehrer konnten innerhalb eines mathematischen Kontextes vorgegebene Initialaufgaben entwickeln sowie (mit Unterstützung) eine Wiederholungs- und Vernetzungseinheit planen und auswerten. Sie erhielten dabei Aufgabenideen für den zukünftigen Unterricht, die u.a. von ihren Schülern stammten. Die Studierenden konnten ihre Kenntnisse der Schulmathematik auffrischen und Ideen für ihre schulpraktischen Studien sowie das spätere Berufsleben mitnehmen. Auf der anderen Seite illustrierten Aufgabennetze Aspekte der Theoriebildung, zeigten aber auch ihre Grenzen auf und ließen Möglichkeiten für weitere Forschung anklingen.

In diesem Sinne knüpft der methodische Ansatz der vorliegenden Arbeit an Vorschläge von Wittmann (1995, 365ff.) an, der Mathematikdidaktik als „Design Science“ interpretiert und die Konstruktion von „substanziellen Lernumgebungen“ in den Mittelpunkt didaktischer Forschungsprozesse stellt. *Aufgabennetze* können ebenfalls als „substanzielle Lernumgebungen“ im Sinne von Wittmann (1995, 365f.) interpretiert werden, weil sie wichtige Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts berücksichtigen (vgl. 2.1, 2.2) und vielfältige Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten anbieten (vgl. 2.5, 4.1, 4.2). Sie verbinden aber auch verschiedene theoretische Aspekte durch konkrete Beispiele (vgl. 2.5, 4). Etwas schwieriger lässt sich ein weiteres von Wittmann aufgestelltes Kriterium überprüfen: die Flexibilität oder die leichte Adaptationsfähigkeit an konkrete Lerngruppen. Dieses Kriterium lässt sich nicht ohne Austausch mit Lehrern thematisieren.

5.1.3 Lehrer als Träger professionellen mathematikdidaktischen Wissens

Die Kooperation mit Lehrern ist ein weiterer Punkt, in dem die vorliegende Arbeit an Wittmann (1995, 365ff.) anknüpft. Doch im Unterschied zu Wittmann, der vor allem Mathematikdidaktiker als Experten für die Entwicklung mathematikdidaktischer Forschung und von Lernumgebungen ansieht und beispielsweise eine Grenze zwischen wissenschaftlichen Zeitschriften und Lehrerzeitschriften zieht, werden in der vorliegenden Arbeit Lehrer nicht nur als Experten für den Mathematikunterricht betrachtet. Es wird vielmehr behauptet, dass sie über besonderes professionelles Wissen verfügen, welches Mathematikdidaktikern an Universitäten aufgrund der Schwerpunktsetzung in ihrer Arbeit verborgen bleiben kann (vgl. Tenorth 2006b, 580ff.). Didaktiker können andererseits über theoretische und fachliche Kenntnisse verfügen, die bei Lehrern nicht (oder

[1] Eventuell haben die Schüler dies auch verschleiert getan.

noch nicht) vorhanden sind. Ein Beispiel dafür könnten neuere fachliche Entwicklungen (beispielsweise in der Stochastik) sein, zu dem universitäre Mathematikdidaktiker institutionell bedingt einen besseren Zugang haben als Kollegen aus der schulischen Praxis. Insofern verspricht eine Kooperation und gegenseitige Anerkennung und Ergänzung sowohl aus praktischer wie auch aus theoretischer Sicht neue Erkenntnisse. Deshalb besteht die Herausforderung der mathematikdidaktischen Forschung gerade darin, Lehrer nicht nur als „Dirigenten“, sondern als „Komponisten“, aber auch Kritiker der zu entwickelnden Unterrichtsvorschläge einzubeziehen, um ihr professionelles Wissen in den Forschungsprozess zu integrieren (vgl. Wittmann 1995, 365).

Die Umsetzung der oben beschriebenen Vorschläge kann durch verschiedene Faktoren (wie beispielsweise forschungs- und bildungspolitische Rahmenbedingungen) erschwert sein. Bei dem aktuellen Arbeitsaufwand, mit dem Lehrer in der schulischen Praxis täglich konfrontiert werden, kann es einem Lehrer schwer fallen, sich aktiv an der Entwicklung von Aufgabennetzen zu beteiligen und sich theoretisch damit auseinanderzusetzen. Doch auch unter den aktuellen Bedingungen lassen sich entsprechende Gelegenheiten dafür schaffen und nutzen. So können beispielsweise mathematikdidaktische Tagungen in die Lehrerfortbildungen integriert werden und umgekehrt (vgl. Brinkmann, Maaß, Ossimitz, Siller 2010). Dabei können Lehrer sich in Form von Vorträgen, Diskussionsbeiträgen oder, wie in 4.2.2 gezeigt, Workshops an der Entwicklung und Reflexion des Unterrichts beteiligen. Die Integration von Forschungsexperimenten in die universitäre Lehrerausbildung ist ein anderer wichtiger Schritt in die angedeutete Richtung (vgl. 4).

5.2 Theoretische Erkenntnisfortschritte

Auf der theoretischen Ebene wurden Beziehungshaltigkeit und Vernetzungsreichtum als Ziele des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts hinterfragt (vgl. 2.1). Des Weiteren wurden Beziehunghaltigkeit und Vernetzungen im Mathematikunterricht als historisch aufeinander aufbauende unterschiedlich akzentuierte Konzepte herausgearbeitet (vgl. 2.2, 2.3, 2.4) sowie schließlich aktuelle Ansätze zu Vernetzungen im Mathematikunterricht weiter entwickelt (vgl. 3).

5.2.1 Reflexion von Beziehungshaltigkeit bzw. Vernetzungen als Ziele des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts

In 2.1.1 wurden Verknüpfungen und Vernetzungen aus verschiedenen allgemein-pädagogischen Perspektiven (Christentum, Wilhelm von Humboldt, Klafki und Tenorth) diskutiert. Dabei wurde die Bedeutung der Sprachlichkeit des Menschen in seinem Bildungsprozess hervorgehoben. Demnach versetzt die Sprache den Menschen in die

Lage, die ihn umgebende Welt nicht nur zu studieren und zu beschreiben, sondern auch schöpferisch zu gestalten. Dabei können im Sinne von Humboldt verschiedene Sprachen als verschiedene Sichtweisen auf die Welt interpretiert werden und sie in ihrer Vielfalt erfahrbar machen. Klafki geht von der Annahme aus, dass diese Welt immer komplexer wird und hebt deshalb die Bedeutung vernetzenden Denkens im Bildungsprozess hervor. Eine etwas offenere Sichtweise auf die Komplexität der Welt und auf Bildungsprozesse bieten die Vorschläge von Tenorth. Für ihn finden Bildungsprozesse im Umgang mit Unsicherheiten des Menschen über Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft statt (vgl. 2.1.2). In diesem Sinne vollzieht sich mathematische Bildung in der Spannung zwischen Sicherheiten, die Mathematik durch ihre höchst vernetzte Sprache liefert, und Unsicherheiten, die diese Sprache erzeugt. Daraus erwachsen Möglichkeiten, dem „Netz des Wissens“ im Einklang mit Fischer und Popper zu „entkommen“ und bestehende Beziehungen zu hinterfragen (vgl. 3.2).

Die oben vorgestellten Möglichkeiten, Bildung zu denken, wurden daraufhin in 2.1.2 mit einem mathematikdidaktischen Blickwinkel verbunden. So betrachtet Winter Mathematik als ein in sich höchst vernetztes „Universum“ und stellt dies an den Anfang seiner Überlegungen zum allgemeinbildenden Mathematikunterricht. Ausgehend davon wurde auf dem Hintergrund von Humboldts Ideen und unter Bezugnahme auf Vorschläge von Maier und Schweiger (1999) Mathematik als eine *Sprache* metaphorisiert, die auf eine besondere Weise Vernetzungen auszudrücken vermag. Das entsprechende Modell wurde mit Hilfe von Ideen von Mahnhart und Popper reflektiert, wodurch die Hoffnungen auf bildungsfördernde Potenziale einer höchst vernetzten mathematischen Sprache relativiert und mit weiteren Perspektiven aus der Didaktik ergänzt wurden. Das sind beispielsweise Kriterien von Heymann, die eine stärkere Einbeziehung von sozialen Aspekten innermathematischer Vernetzungen in die Kooperation von Schülern und Lehrern im Blick haben.

Vorschläge von Führer und Vohns, die für eine ausgewogenere Sicht auf die Anwendbarkeit der Mathematik und damit verbundene inner- und außermathematische Kohärenzerfahrungen plädieren, wurden in der vorliegenden Arbeit gleichermaßen berücksichtigt, um Beziehungshaltigkeit als Ziel eines allgemeinbildendes Mathematikunterrichts zu hinterfragen (vgl. 2.1).

In den Konturen eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts betrachtet Führer mathematische Sprachschöpfungen als Metaphern innerhalb und außerhalb der Mathematik. Diese dienen zur Beschreibung und Konstruktion von Wirklichkeiten. Der Vorschlag steht im Einklang mit den vorgestellten Ideen aus der allgemeinen Pädagogik, weil er konstruktive, schöpferische Potenziale der Mathematik als Sprache betont. Ausgehend von Führers Beispielen wurde in dieser Arbeit gezeigt, dass Mathematik bei der Beschreibung von Vernetzungen auch destruktiv wirken kann. Deshalb wurden in 3.2

Ideen von Fischer herangezogen, der Vernetzung in der wissenschaftlichen Argumentation durch Reflexion ergänzt. Erst durch Reflexion von hergestellten Vernetzungen wird nicht nur Wissenschaft, sondern auch allgemeinbildender Mathematikunterricht möglich. Dies ist eine Behauptung, die hier durch Verknüpfung der Ideen Führers und Fischers formuliert werden konnte (vgl. 2.1.2).

Eine ausgewogenere Sicht auf Beziehungshaltigkeit als ein Ziel eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts erlauben Ausarbeitungen von Vohns. Für ihn ist es im Unterricht nicht immer möglich und sinnvoll, innermathematische Kohärenz erfahrbar zu machen. Deshalb gehören auch Differenzerfahrungen in den allgemeinbildenden Mathematikunterricht. In der Arbeit wurde gezeigt, wie Erfahrungen dieser Art im Unterricht ermöglicht werden können. So wurde beispielsweise ein und dasselbe Objekt (Tangram, Pythagorasbaum, Sechseck im Kreis) in Kontexten verschiedener mathematischer Gebiete interpretiert. Diese Interpretationen können widersprüchlich erscheinen und sich dennoch in Bezug auf konkrete Fragestellungen als fruchtbar erweisen. Wird beispielsweise ein Tangram-Spiel als ein dreidimensionaler geometrischer Körper interpretiert, so kann es nicht elementargeometrisch mit Zirkel und Lineal konstruiert oder in ein zweidimensionales Koordinatensystem gezeichnet werden. Nichtsdestoweniger liefert jede dieser Interpretationen neue Einsichten und Möglichkeiten, an Algebra (Körperberechnungen, Terme, Gleichungen, funktionale Zusammenhänge) oder an Analytische Geometrie (Koordinaten, Geradengleichungen, Schnittpunkte als Lösungen), aber auch an Elemente der Stochastik anzuknüpfen (vgl. 1.2, 2.1.2, 2.5, 4.1, 4.2).

Überlegungen zu Beziehungshaltigkeit als einem Ziel des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts und insbesondere Ideen von Hischer flossen in weitere Teile der vorliegenden Arbeit ein und erlaubten eine Reflexion mathematikdidaktischer Vorschläge zur Gestaltung eines beziehungsreichen Unterrichts (vgl. 2.3.3).

5.2.2 Beziehungshaltigkeit und Vernetzungen als pädagogisch-didaktische Trends im Wandel der Zeit

Mathematikdidaktiker, die sich mit Vernetzungen im Mathematikunterricht beschäftigen, verweisen in ihren Arbeiten auf Beziehungshaltigkeit. So behauptet Kießwetter, dass das „Wichtigste“ zu Vernetzungen im Zusammenhang mit dem von Freudenthal vorgeschlagenen „lokalen Ordnen“ bereits gesagt wurde (vgl. 2.3.1). Brinkmann zitiert in ihrer Arbeit Klein, Freudenthal, Wittmann und Vollrath (vgl. 2.3.2). Hischer bezieht sich auf Wittenberg und Vollrath (vgl. 2.3.3). Das Ziel der Arbeiten von Kießwetter, Brinkmann und Hischer besteht jedoch nicht in erster Linie darin, die Entwicklung der Konzepte im Laufe der Zeit zu verfolgen und Akzentverschiebungen in den jeweiligen Positionen herauszuarbeiten (vgl. 2.2). Im Gegensatz dazu wurde dies zu einem der

Hauptziele des Kapitels 2 der vorliegenden Arbeit. Dass beide Konzepte historisch aufeinander aufbauen, wurde anhand von mehreren Textstellen und darin enthaltenen mathematischen Beispielen und metaphorischen Wendungen gezeigt.

Zunächst war bei Klein von „Fusion“ als Vorläufer von Beziehungshaltigkeit die Rede (vgl. 2.2.1). Anschließend daran wurde auf die Vorschläge von Lietzmann eingegangen, der einerseits an Klein anknüpft, andererseits von Wittenberg mit den Themenkreisen aufgegriffen wird (vgl. 2.2.3, vgl. 2.2.4). Die Übergänge zwischen diesen theoretischen Konzeptionen wurden durch Interpretationen von metaphorischen Wendungen und durch Unterrichtsbeispiele hergestellt. Dabei ließ sich zeigen, dass sich der Schwerpunkt der Diskussion von der Universitätsmathematik zur Schulmathematik und ihrer allgemeinbildenden Rolle verschoben hatte. Die Wirklichkeit des Schülers wurde zum Ausgangspunkt der Beziehungshaltigkeit im Mathematikunterricht (vgl. 2.2.5). Wie bereits Wittenberg hebt Freudenthal neben Anwendungen die Bedeutung von inner- und außermathematischen Analogien als Mittel hervor, um Beziehungen im Mathematikunterricht herzustellen. Es konnte herausgearbeitet werden, dass die Betonung der Geometrie den Vertretern der Beziehunghaltigkeit gemeinsam ist. Schließlich wurden Auffassungen von Wittmann und Vollrath zur Beziehungshaltigkeit verglichen. Beide Autoren formulierten ihre Ideen im Kontext zeitgenössischer Konzepte aus der Kognitionspsychologie. So plädiert Wittmann eher gegen eine Isolierung von Schwierigkeiten und für das Integrationsprinzip. Vollrath sah Mathematikunterricht in Wechselwirkung zwischen systematischer Anordnung des Wissens und dem netzartigen Problemlösen (vgl. 2.2.6).

Die Ausgewogenheit zwischen Mathematik als System und Mathematik als Problem kennzeichnet auch Texte von Kießwetter, die sich in Ansätzen Brinkmanns zum Teil als Kategorien der Vernetzung wiederfinden (vgl. 2.3.1, 2.3.2). Brinkmann arbeitet weitere Kategorien der Vernetzung heraus und unterscheidet zwischen der stofflichen Ebene von Vernetzungen und der kognitiven Ebene des Schülers (vgl. 2.3.2). Hischer reflektiert über Vernetzungen im pädagogisch-didaktischen Kontext, indem er vor allem an das Allgemeinbildungsmodell von Klafki anknüpft und ein Axiomensystem zur Definition von Netzen, Netzgraphen und Netzwerken im Mathematikunterricht vorschlägt, aus dem er Kriterien für „vernetzenden Unterricht“ ableitet (vgl. 2.3.3). Bei der Beschäftigung mit Beziehungshaltigkeit und Vernetzungen als historisch aufeinanderfolgenden Konzepten wurden gleichzeitig Hinweise über Möglichkeiten der Gestaltung eines „vernetzenden Unterrichts“ ausgearbeitet und in einem Aufgabennetz für die 6. Klasse („Tangram“) umgesetzt und erprobt. Daraus ließen sich Richtungen für die Weiterentwicklung theoretischer Aspekte ableiten (vgl. insbesondere 2.5).

5.2.3 Einkleidung als Mittel der Vernetzung

Im Kapitel 3 wurde eine Möglichkeit vorgeschlagen, das Kategoriensystem von Brinkmann mit Gedanken eines „vernetzenden Unterrichts“ von Hischer zu kombinieren. Ausgehend davon und in Anlehnung an Vorschläge aus der allgemeinen Modelltheorie sowie Ansätzen anwendungsbezogener Modellierung in der Mathematikdidaktik wurde die von Brinkmann vorgeschlagene innermathematische Modellvernetzung als eine Kategorie untermauert. Auf der anderen Seite wurde eine weitere Kategorie von Vernetzungen durch Einkleidung vorgeschlagen, um Ideen von Wittenberg, Freudenthal und Fischer zu Analogien als einem Mittel der Vernetzung einzubeziehen (vgl. 3.1, 3.2).

5.2.4 Mathematik als epistemisch-soziales Phänomen

Unter Berücksichtigung von Ideen Heymanns (vgl. 2.1.2), Hischers (vgl. 2.3.3) und Fischers (vgl. 3.3) zu sozialen Aspekten von Vernetzungen erscheint es sinnvoll diese stärker beim Wiederholen und Vernetzen im Mathematikunterricht zu berücksichtigen. Daraus ergab sich der Vorschlag ausgehend von einem um die soziale Ebene erweiterten Disziplinbegriff, Mathematik nicht nur als ein epistemisches, sondern auch als ein soziales Phänomen zu betrachten.

Ausblicke auf philosophische und soziologische Untersuchungen zum Wesen der Mathematik in 3.3 ergaben, dass epistemische Eigenschaften der Mathematik wissenschaftliche Kommunikation wesentlich beeinflussen. So vermuten beispielsweise Maaß, Kleinert und Kvasz, dass Kohärenz innerhalb mathematischer Gebiete Differenzen zwischen ihnen und der Welt außerhalb von Mathematik erzeugt. So besteht in der Mathematik kein „Bewährungszwang“ an der Realität außerhalb von ihr, so dass sich mathematische Theorien zugunsten innerer Kohärenz immer weiter von der physischen Realität ablösen können. Dies betrifft auch den Zusammenhalt innerhalb eines mathematischen Gebietes. Da die Strukturierung und Ordnung von Forschungsergebnissen in der Mathematik als Ganzes sehr komplex ist, sind Mathematiker im Sinne eines pragmatischen Formalismus bestrebt, ihre Ergebnisse innerhalb eines abgesteckten Bereiches zu ordnen sowie an die Ergebnisse ihrer Kollegen aus dem eigenen und aus anderen Gebieten anzuknüpfen oder wenigstens zu verweisen. Dies trägt zu einem hohen sozialen Konsens bei, der nicht nur innerhalb der Expertengruppen, sondern innerhalb der ganzen mathematischen Gemeinschaft hergestellt wird.

Als Ergebnis dieser Betrachtungen wurden Unterschiede in der geschriebenen und der gesprochenen mathematischen Fachsprache in ihren kommunikativen Funktionen herausgearbeitet. Dabei stellte sich heraus, dass insbesondere geometrische Zeichnungen eine direkte Kommunikation[2] erleichtern können, was mit einem veränderten Grad an

[2] Hoffkamp (2011, 86) spricht in diesem Zusammenhang von *visueller Kommunikation*.

Explikation einhergehen kann. Darüber hinaus ergab sich das Fazit, dass mathematische Beweise nicht nur epistemisch als Mittel der Wahrheitssicherung oder Ableitbarkeit, sondern auch kommunikativ als Mittel zum Überzeugen gedeutet werden können.

Um oben dargestellte Erkenntnisse auf Unterrichssituationen übertragen zu können, wurde der Ansatz von Kvasz herangezogen. Kvasz sieht die Entwicklung der Mathematik im Wechselspiel ikonischer und symbolischer Sprachen. Diese Betrachtungen unterstützen die Behauptung von Vohns, für den Kohärenzerfahrungen zwischen Mathematik und dem Außermathematischen sowie zwischen verschiedenen mathematischen Gebieten im Unterricht nicht immer möglich und sinnvoll sind. So sind gerade Unterschiede und damit verbundene Begrenzungen der jeweiligen Sprachen der Mathematik dafür verantwortlich, dass sie sich weiter entwickelt. Bei der Entwicklung von einer symbolischen Sprache (z. B. Arithmetik) zu einer anderen symbolischen Sprache (z. B. Algebra) durchläuft Mathematik nach der Ansicht von Kvasz ein ikonisches (oder geometrisches) Stadium. Nichtsdestowenger zeigt Kvasz, dass auch ikonische Sprachen beim Erklären und Beweisen von bestimmten mathematischen Phänomen (z.B. Dreiteilung eines Winkels) ihre Grenzen aufweisen (vgl. 2.1.2, 3.3).

Von Kvasz herausgearbeitete linguistische Aspekte der Mathematik bestätigen Vorschläge von Klein zu Visualisierungen im Mathematikunterricht (vgl. 2.2.1). Es wurde gezeigt, dass die Betrachtungen von Kvasz im Einklang mit Vorschlägen zur Beziehungshaltigkeit (Lietzmann, Wittenberg, Freudenthal) stehen, welche die besondere Bedeutung der Geometrie unterstreichen (vgl. 2.2, 3.4). Es wurden darüber hinaus Ausführungen von Winter, Maier und Schweiger untermauert, wonach Visualisierungen nicht immer die Darstellung eines mathematischen Sachverhaltes vereinfachen, sondern von den Schülern komplexe kognitive Fähigkeiten erfordern, was sich in Erprobungen bestätigt hat (vgl. 2.5, 3.4, 4).

5.3 Fachinhaltiche und praxisbezogene Erkenntnisse

Die auf der theoretischen Ebene gewonnenen Erkenntnisse wurden bei der Konstruktion der Aufgabennetze berücksichtigt. Im Folgenden werden die dabei gewonnenen fachinhaltichen und unterrichtsmethodischen Erkenntnisse vorgestellt.

An der Schnittstelle zwischen Theorie und Praxis beziehungshaltigen Mathematikunterrichts entstanden drei Aufgabennetze für Sekundarstufe I: „Tangram“, „Pythagorasbaum“ und „Rund ums Sechseck“. Ergänzt durch die Initialaufgaben und Empfehlungen zur Unterrichtsgestaltung stellen sie zentrale Ergebnisse der Arbeit dar. Diese Aufgabennetze lassen sich einerseits miteinander verflechten, andererseits durch weitere Initialaufgaben verdichten.

5.3.1 Von *Themenkreisen* und *Aufgabenvariation* zu *Aufgabennetzen*

In seinen *Themenkreisen* schlägt Wittenberg vor, den Unterricht ausgehend von einer zentralen geometrischen Gegebenheit zu entwickeln. In „durchsichtigen Diagrammen“ sollten Richtungen skizziert werden, in die ein Themenkreis sich ausbreiten kann, um verschiedene Fragestellungen miteinander zu verflechten. Die von Wittenberg ausgearbeiteten inhaltlichen Bezüge sollten geometrische mit arithmetischen und algebraischen Problemen verbinden. Seine Vorschläge können eher als Dialoge zwischen dem Schüler und der Mathematik bzw. dem Mathematiklehrer denn als bereits ausgearbeitete Aufgabenstellungen aufgefasst werden. In der *Aufgabenvariation* von Schupp wird im Gegensatz dazu von einer konkreten Aufgabenstellung ausgegangen, aus der verschiedene Schülervariationen entstehen können. Die Richtungen der Variationen sind dabei offen. Bei den in dieser Arbeit konstruierten *Aufgabennetzen* wird wie in den *Themenkreisen* Wittenbergs von einer zentralen geometrischen Gegebenheit (Modell oder Zeichnung) ausgegangen. In der Einstiegsphase können die Schüler Bezüge zu ihnen bekannten Themenbereichen nennen. Im nächsten Schritt sollen sie in kleinen Gruppen mehrere sich auf eine vorgegebene Zeichnung oder ein Modell beziehende Initialaufgaben bearbeiten, um Bezüge zu verschiedenen Themenbereichen herzustellen. Diese sollen anschließend im Klassenverband präsentiert und diskutiert werden. In der nächsten Phase können die Schüler ebenfalls in kleinen Gruppen ihre eigenen Aufgaben konstruieren, indem sie beispielsweise vorgegebene Aufgaben miteinander kombinieren (vgl. 1.2, 2.2.5, 2.5).

Für die Konstruktion der *Aufgabennetze* wurden zunächst Ideen von Klein, Lietzmann, Wittenberg, Kießwetter, Winter herangezogen (vgl. 2.2, 2.4) und in den entsprechenden Initialaufgaben umgesetzt. Das sind beispielsweise Veranschaulichungen von Brüchen, eine Untersuchung von geometrischen Zusammenhängen mit Hilfe von Funktionen oder eine geometrische Motivation für irrationale Zahlen. Daraufhin wurden Bezüge zu Elementen der Stochastik gesucht, wobei Vorschläge von Engel (2007), Schönwald (1993), Bea und Scholz (1995) berücksichtigt wurden. Die Ergebnisse dieser fachinhaltichen Potenzialanalysen sind diagrammatisch in den Abbildungen (siehe S. 140, S. 180)[3] vorgestellt. Die dabei ausgearbeiteten Vorschläge hinsichtlich von Bezügen zu Elementen der Stochastik werden im Folgenden exemplarisch näher beleuchtet.

Beispiel: Fachinhaltiche Bezüge zu Elementen der Stochastik

In Analogie zu geometrischen Visualisierungen von Konzepten (Brüche, Terme, Funktionen) in Arithmetik und Algebra wurde in dieser Arbeit vorgeschlagen, Wahrscheinlichkeiten geometrisch zu modellieren. Dies wurde am Beispiel des Pythagorasbaumes

[3] Die Abbildungen werden am Ende des Abschnittes vergrößert als Grundlagen für die vorgestellten Aufgabennetze aufgeführt.

exemplarisch gezeigt und in Bezug auf Vor- und Nachteile der Darstellung reflektiert (vgl. 4.1).

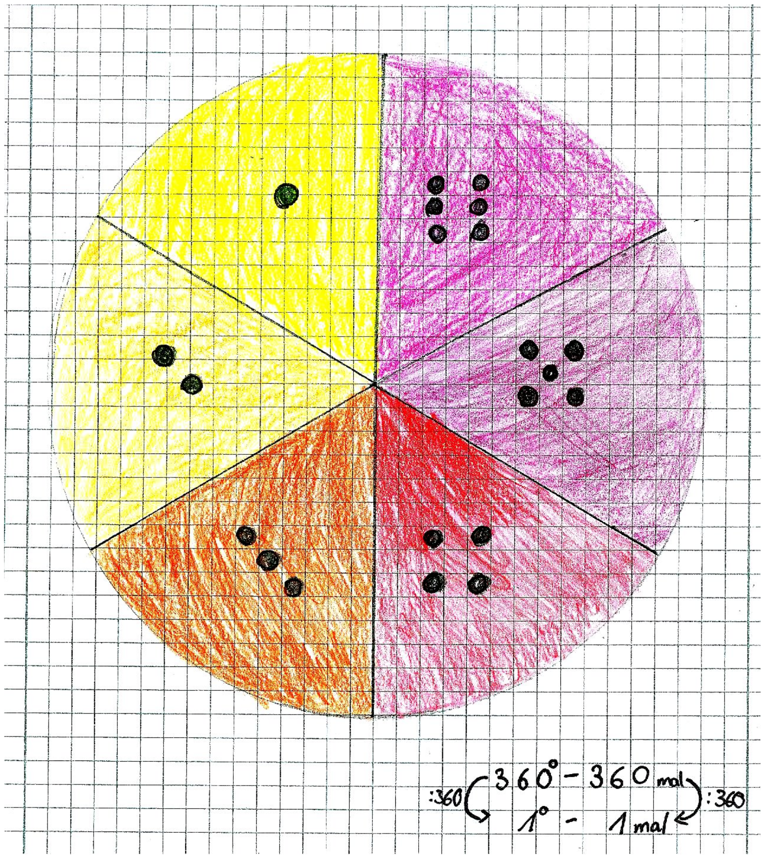


Abbildung 5.1: Wahrscheinlichkeiten als Kreissektoren

Die Abbildung 5.1 zeigt eine weitere von Fünftklässlern gefundene Möglichkeit, theoretische Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Augenzahlen beim Würfeln eines Hexaeders darzustellen. Wird ein Hexaeder beispielsweise 100 Mal geworfen und werden die relativen Häufigkeiten für entsprechende Augenzahlen bestimmt und ein entsprechendes Kreisdiagramm gezeichnet, so können Unterschiede in den Begriffen „Wahrscheinlichkeit" und „relative Häufigkeit" geometrisch verdeutlicht werden. Während Wahrscheinlichkeiten durch gleich große Sektoren repräsentiert werden, weichen die Sektoren des Kreisdiagramms für die relativen Häufigkeiten voneinander ab. Durch Übereinanderlegen beider Figuren lassen sich Abweichungen relativer Häufigkeiten von theoretischen Wahrscheinlichkeiten veranschaulichen.

Beim Entwickeln eigener Aufgabenstellungen durch Schüler und Lehrer kamen in den Erprobungen der Aufgabennetze „Pythagorasbaum" und „Rund ums Sechseck" Aspekte außermathematischer Modelle vor. Insbesondere beim Herstellen von Bezügen zwischen

Geometrie und Elementen der Stochastik wurden nicht nur von Schülern, sondern auch von Lehrern außermathematische Einkleidungen (Glücksspiele, Dartscheiben) herangezogen.

Darüber hinaus wurde vorgeschlagen, geometrische Figuren in Koordinatensysteme zu zeichnen und ihre Koordinaten als statistische Datensätze zu interpretieren. Bei der Darstellung von geometrischen Figuren in zweidimensionalen Koordinatensystemen können Datensätze der x-Koordinaten und der y-Koordinaten mit Hilfe von statistischen Kenngrößen (arithmetischer Mittelwert, Spannweite, Maximum, Minimum, mittlere lineare Abweichung) miteinander verglichen werden. Diese Kenngrößen können wiederum geometrisch interpretiert werden. Darüber hinaus lassen sich mit Hilfe arithmetischer Mittelwerte der Koordinaten der Eckpunkte die Mittelpunkte geometrischer Figuren berechnen.

5.3.2 Aspekte der vertikalen Vernetzungen

Filler (2007, 51) beschreibt sogenannte *vertikale Vernetzungen* als das Anknüpfen an Lehrplaninhalte früherer Klassenstufen. Demnach sind sie „im Sinne des Brunerschen Spiralprinzips auch für das Erreichen eines vertieften Verständnisses mathematischer Inhalte durch ihre Behandlung auf verschiedenen Abstraktionsstufen von Bedeutung“ (Filler 2007, 51).[4] Dies betrifft sowohl Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Sekundarstufe I wie auch Vorschau auf die Inhalte der Sekundarstufe II. Im Folgenden wird deshalb zunächst auf die Schwierigkeiten eingegangen, die mit der Einteilung der Inhalte auf Jahrgangsstufen verbunden sind. Danach werden Möglichkeiten der Ausblicke auf die Sekundarstufe II erläutert, die sich durch die vorgestellten Aufgabennetze ergeben.

Einteilung der Inhalte in den Rahmenlehrplänen auf Jahrgangsstufen

Bei der Konstruktion und dem Einsatz von konkreten Aufgaben resultieren aus der Einteilung der Inhalte in den Rahmenlehrplänen auf Jahrgangsstufen bzw. Doppeljahrgangsstufen Umsetzungsschwierigkeiten auf der fachinhaltichen Ebene. So werden beispielsweise irrationale Zahlen häufig erst ab der 9. Klassenstufe thematisiert. Infolgedessen versuchen Lehrer (wie die Erprobungen zeigten), den irrationalen Zahlen im Unterricht auf den unteren Stufen auszuweichen. Im Zusammenhang damit stellt sich die Frage nach geometrischen Kontexten, die dieses Ausweichen erlauben. Am Beispiel des Pythagorasbaumes, bei dem irrationale Streckenlängen vorkommen, wurde gezeigt, dass er so in ein Koordinatensystem gezeichnet werden kann, dass er nur rationale Zahlen als Koordinaten besitzt (vgl. 4.1).

[4] Siehe dazu auch Brandl und Nordheimer 2011.

Der Themenbereich *Ähnlichkeit geometrischer Figuren*, der Bezüge zu den Themenbereichen *Brüche als Proportionen oder Verhältnisse* sowie *Proportionale Zuordnungen* aufweist, wird ebenfalls meistens erst ab der 9. Klassenstufe eingeführt. Im Gegensatz zu den irrationalen Zahlen könnte die Ähnlichkeit genauso wie die Figur zum Satz des Pythagoras propädeutisch auf einer ikonischen Ebene eingeführt werden. Das heißt, die Schüler werden mit Zeichnungen ähnlicher Figuren konfrontiert und untersuchen diese, ohne dass sie mit Ähnlichkeits- und Strahlensätzen oder dem Ähnlichkeitsfaktor als Begriff konfrontiert werden. Sie können an konkrete Zeichnungen und Spezialfälle gebundene Eigenschaften ähnlicher Figuren untersuchen und beim Herstellen von Beziehungen nutzen. So lassen sich beispielsweise Brüche als Verhältnisse von Flächeninhalten ähnlicher Figuren auffassen.

Propädeutik in Bezug auf Unterrichtsinhalte der Sekundarstufe II

Neben dem Anknüpfen an Kenntnisse aus der Grundschule und Verknüpfen von Kenntnissen in der Sekundarstufe I, können mit Hilfe von *Aufgabennetzen* Inhalte aus der Sekundarstufe II im Sinne des langfristigen Kompetenzaufbaus vorbereitet werden (vgl. Bruder 2006, 143). Durch Darstellungen von geometrischen Objekten im Koordinatensystem wird die analytische Geometrie vorbereitet. Werden Punkte durch Zahlenpaare repräsentiert und diese Punkte beinhaltende Figuren bewegt, gestreckt und gestaucht, so kommen propädeutisch Beispiele für Vektorräume in den Unterricht.

Beispiele für Zuordnungen und Funktionen, deren Graphen durch diskrete Punktmengen repräsentiert sind, können die Einführung von Zahlenfolgen vorbereiten. Geometrische Visualisierungen exponentieller und logarithmischer Funktionen sowie von Grenzprozessen lassen sich im späteren Analysisunterricht aufgreifen.

Geometrische Darstellungen von Ergebnismengen, Wahrscheinlichkeiten und Alternativen zu den Pfadregeln als Alternativen zu Baumdiagrammen leiten zum Stochastikunterricht über. Insbesondere Darstellungen von Bernoulli-Experimenten mit zwei Ausgängen durch Fraktale wie beispielsweise den Pythagorasbaum können in der Sekundarstufe II wieder aufgegriffen werden. Eine an der Erprobung für eine 9. Klasse beteiligte Lehrerin äußerte von sich aus den Wunsch, den Pythagorasbaum in dem von ihr unterrichteten Leistungskurs als Veranschaulichung für Wahrscheinlichkeiten vorzustellen. Sie wandelte die Aufgabe für ihre Lerngruppe ab und präsentierte sie in Form eines Unterrichtsgesprächs an der Tafel.

Auf diese Weise bekommen Schüler, die in der Zukunft kein Abitur machen möchten, eine Chance, ihr mathematisches Allgemeinwissen zu erweitern. Sie erhalten zumindest in Umrissen einen Ausblick auf Mathematik jenseits ihres Schulabschlusses (vgl. Menck 1986, 112). Diejenigen Schüler, die das Abitur anstreben, können dadurch propädeutisch

Erfahrungen sammeln, die zur Ausbildung von sekundären Grundvorstellungen beitragen, an die der Mathematikunterricht in der Abiturstufe anknüpfen kann (vgl. vom Hofe 2003, 6).

5.3.3 Berücksichtigung von unterrichtsmethodischen und sozialen Aspekten des Unterrichts

Die oben beschriebenen Erfahrungen in der Zusammenarbeit mit Lehrern zeigten, dass sie die in den *Aufgabennetzen* enthaltenen fachinhaltlichen Hinweise schätzten und gern in ihren Unterricht einbauten. Skeptischer waren vor allem Oberstufenlehrer im Bezug auf die damit verbundene Gruppenarbeit. Die Reaktion von Lehrern beim Formulieren der Initialaufgaben zeigte, dass sie diese Aufgaben lieber in Einzelarbeit einsetzen würden (vgl. 4.2.3). Dies ist auch in einer in der vorliegenden Arbeit nicht präsentierten Erprobung geschehen. Dort entschied sich der Lehrer dafür, drei von sechs Initialaufgaben im Gruppenunterricht und die restlichen drei in den sich mit Auswertungen und Unterrichtsgesprächen abwechselnden Einzelarbeitsphasen bearbeiten zu lassen. Seine Entscheidung begründete er damit, dass es ihm bei bestimmten Themenbereichen wichtig war, schriftliche Ergebnisse von jedem Schüler einzusammeln und zu schauen, wo jeder einzelne Schüler in jedem Fachgebiet steht, um davon auszugehend seinen zukünftigen Unterricht zu planen. Dadurch wurde der Zeitaufwand nicht wesentlich erhöht. Die Schüler hatten zwar bei den drei Aufgaben weniger Möglichkeiten, sich untereinander auszutauschen, sie konnten sich jedoch für die Präsentation der Aufgabe melden, diese vorstellen und anschließend Fragen der Mitschüler beantworten. Es konnten jedoch höchsten sechs Schüler (entsprechend der Anzahl der Initialaufgaben) ihre Ergebnisse präsentieren, während die anderen 27 mit ihren Fragen und Ergänzungen zu den Präsentationen beitragen konnten. Wenngleich die von dem Lehrer getroffene Entscheidung eine sinnvolle Möglichkeit darstellt, *Aufgabennetze* im Unterricht einzusetzen, zeigen sowohl in der vorliegenden Arbeit dargestellte Äußerungen von Schülern (vgl. 1.2) wie auch Erkenntnisse auf der theoretischen Ebene (vgl. 3.3), dass fachliche und soziale Aspekte der Aufgabennetze erst durch kooperative Formen zur Geltung kommen.

Da die Lehrer letzten Endes entscheiden, ob und wie sie *Aufgabennetze* im Unterricht einsetzen und hier als Experten für Unterricht in ihren Lerngruppen betrachtet werden, wurden in der vorliegenden Arbeit lediglich vorsichtige Vermutungen und kollegiale Empfehlungen zur stärkeren Berücksichtigung von sozialen Aspekten vernetzenden Unterrichts formuliert. Was man davon erhoffen kann, deuten präsentierte Schülerideen an, die teilweise sowohl für Lehrer wie auch für Didaktiker unverhoffte inner- und außermathematische Bezüge enthielten (wie statistische Untersuchungen an geometrischen

Figuren, Konstruktion eines Siebenecks oder Modellierung von Lungen) veranlassten (vgl. 1, 2.5, 4.1 und 4.2).

5.4 Ausblick auf weitere Forschungsmöglichkeiten

Die oben zusammengefassten Ergebnisse deuten Möglichkeiten sich daran anschließender Forschung an, die im Folgenden unter verschiedenen Aspekten kurz zusammengefasst werden.

Konstruktion und Erprobung von weiteren Aufgabennetzen: Bei den bereits vorgestellten Aufgabennetzen wurden ausgewählte Möglichkeiten, verschiedene Themenbereiche zu skizzieren, thematisiert. So wurde beispielsweise bei der Visualisierung von mehrstufigen Zufallsexperimenten mit zwei Ausgängen lediglich auf einige wenige Experimente eingegangen. Es könnte ausführlicher auf Variationen der Parameter eines mehrstufigen Experiments mit zwei Ausgängen und ihre Auswirkungen auf die Darstellung durch den Pythagorasbaum eingegangen werden. Des Weiteren ist nach neuen geometrischen Kontexten zu suchen, die vielfältige Bezüge zu anderen Gebieten der Mathematik aufweisen. Dabei kann an bereits vorgestellte Kontexte angeknüpft werden. So kann beispielsweise der Kontext des Tangram-Quadrates in den Kontext der Tangram-Vierecke umgewandelt werden. Es kann ebenso bereits beim Einstieg nicht nur nach einer quadratischen Tangram-Figur, sondern nach verschiedenen konvexen Vierecken gefragt werden. Anschließend lassen sich diese Vierecke aus verschiedenen mathematischen Perspektiven interpretieren und untersuchen.

Soziale Aspekte der Mathematik und ihre Konsequenzen für den Unterricht: Eine differenziertere Auseinandersetzung mit sozialen Aspekten der mathematischen Sprache sowie Unterschiede zwischen mündlichen und schriftlichen mathematischen Beweisen und Implikationen dieser Unterschiede für vernetzenden Mathematikunterricht und eine Illustration gewonnener Erkenntnisse anhand von konkreten Unterrichtsbeispielen könnten ebenfalls zum Gegenstand weiterer Forschung werden. Hierbei wäre ein Anknüpfen an aktuell kontrovers diskutierte Vorschläge von Fischer sinnvoll, der den Bildungsbegriff auf kollektive Gestaltungsprozesse überträgt und im Zusammenhang mit (überfachlichem) Entscheiden und (fachlichem) Problemlösen diskutiert. Es wäre genauer zu untersuchen, warum viele Lehrer in Bezug auf den Einsatz von *Aufgabennetzen* in Gruppenarbeit skeptisch sind. Ausgehend davon können Wege gesucht werden, Effektivität von Gruppenarbeit im Unterricht zu erhöhen.

Weiterentwicklung von Forschungsmethoden: Ausgehend von dem Zugang zu mathematikdidaktischen Texten über Metaphern kann nach dem Einsatz sprachwissenschaftlicher Methoden in der Mathematikdidaktik gefragt werden. In Bezug auf die Kooperation mit Lehrern wäre beispielsweise an die Erfahrungen von skandinavischen

Kollegen anzuknüpfen, um die Lehrer noch stärker von Anfang an als Experten in den Forschungsprozess einzubeziehen.

Die als Themenkreise zusammengefasste Aufgabennetze (siehe Anhang) sollen die vorliegende Arbeit abschließen, Möglichkeit weiterer Untersuchungen zeigen und durch Entdeckungen Schüler, Studierenden und Lehrer illustrieren, dass Mathematik als „ein von Menschen gemachtes Universum mit einem Höchstmaß an innerer (deduktiver) Vernetzung und Offenheit gegenüber Neuschöpfungen und neuen Ordnungen und Beziehungen“(vgl. Baptist und Winter 2001, 61) aufgefasst werden darf.

6 Anhang

Es folgen jetzt Kopien weiterer Schülerprodukte. Sie gehören zu den in 4.1.2 beschriebenen Erprobungen.

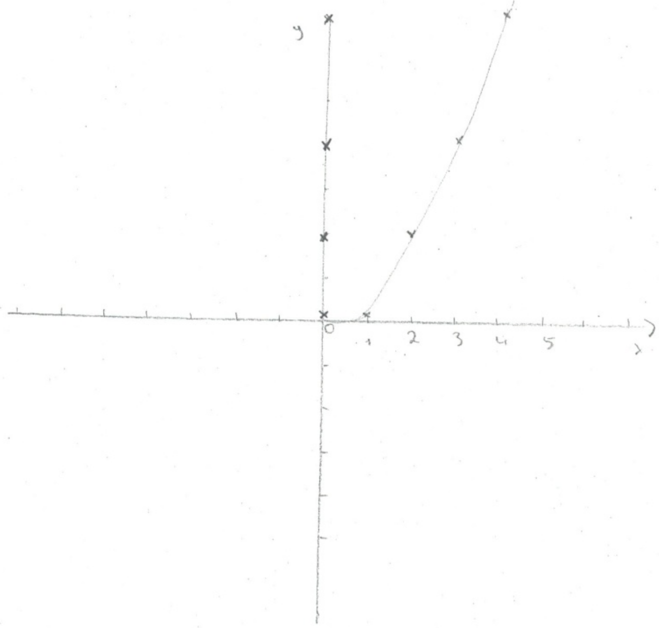
Lösungen Initialaufgaben

Abhängigkeit

• Mit welcher Funktion könnt ihr die Abhängigkeit des Flächeninhalts der abgebildeten Figur von der Stammdicke beschreiben. Benutzt dabei alle euch bekannten Darstellungen von Funktionen.

	x	F(x)
1	1	4,75
2	2	19
3	3	42,75
4	4	76
5	5	118,75
6		

$$3\left(h^2 + \frac{(H\cdot\sqrt{2})^2}{2}\right) = A \text{ ges.}$$



Sophie, Nicola, Laura, Max, Gina, Laura

F: „Kreis"

Berechnet jeweils den Umfang und den Flächeninhalt der zu den Dreiecken gehörenden Umkreise.
Welche Gesetzmäßigkeiten fallen euch auf?

Rechnungen:

$r = 1{,}5$ cm

$r^2 \cdot \pi = A \approx 7{,}07\ \text{cm}^2$ → Flächeninhalt (erstes Dreieck)

$2r \cdot \pi = u \approx 9{,}42$ cm

$r = 1{,}1$ cm

$r^2 \cdot \pi \approx 3{,}8\ \text{cm}^2$ → Flächeninhalt (zweites Dreieck)

$2 \cdot \pi \cdot r \approx 6{,}91$ cm

$r = 0{,}8$ cm

$r^2 \cdot \pi \approx 2{,}01\ \text{cm}^2$ → Flächeninhalt (drittes Dreieck)

$2 \cdot \pi \cdot r \approx 5{,}03$ cm

Gesetzmäßigkeit:

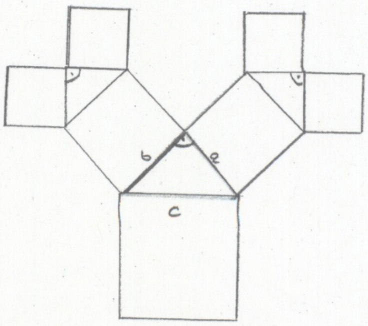
$a^2 + b^2 = c^2$

$a = b \rightarrow a^2 + a^2 = c^2$

$2a^2 = c^2$

$\sqrt{2a^2} = \sqrt{c^2}$

$\sqrt{2} \cdot a = c$



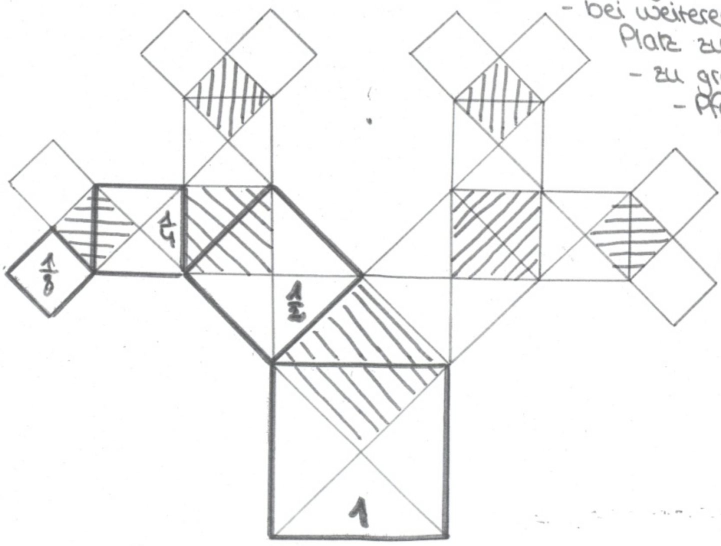
Pfadregeln

Vorteile

- Verdeutlichung der Warscheinlichkeiten durch Flächeninhalt
- Flächen zum Beschriften

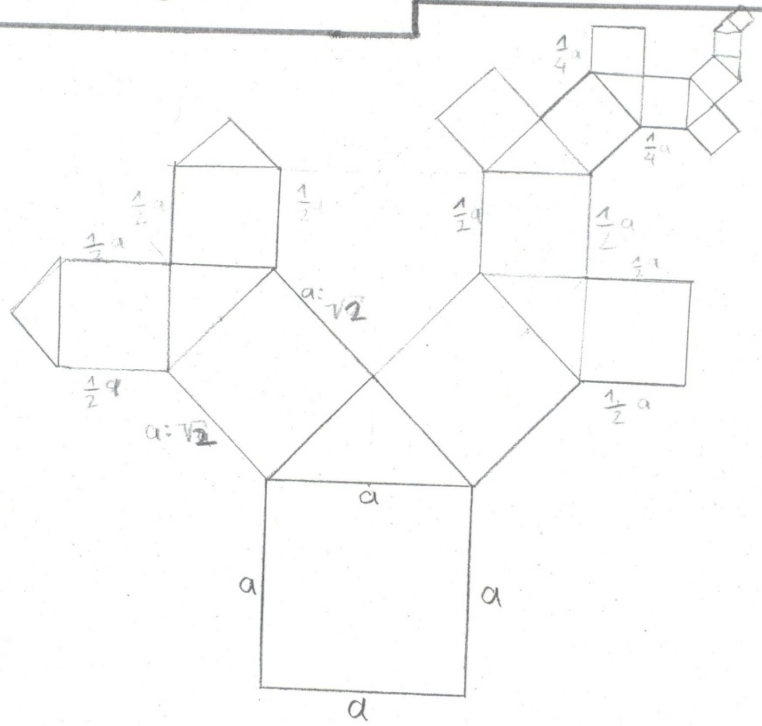
Nachteile

- unübersichtlich
- aufwendig zu konstruieren
  - bei weiteren Würfen kein Platz zum Schreiben
    - zu groß
      - Pfadmultiplikationsregel nicht anwendbar
        ↳ nicht so gut hinschreibbar
- Experimentanzahl ist begrenzt



Initialaufgabe

B) Für welchen Wert von a sind die Werte für den Flächeninhalt und den Umfang der abgebildeten Figur gleich?

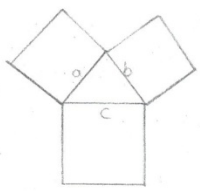


A: „Zahlen und Längen"

Behauptung: Rationale Zahlen reichen zur Beschreibung der vorkommenden Seitenlängen des Baumes aus.

Beispiel:

Skizze:



Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

$c \mathrel{\hat{=}} 5 \qquad 5^2 = 2a^2$

$a \mathrel{\hat{=}} b \qquad 3{,}5355... \approx a$

Begründung:

$5 : 3{,}5355... \approx \sqrt{2}$

Daraus kann man schließen, dass der Vergrößerungsfaktor der Seite c gleich $\sqrt{2}$ ist.

Da $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, und das Produkt einer irrationalen und einer rationalen Zahl immer irrational ist, reichen rationale Zahlen nicht zur Beschreibung der vorkommenden Seitenlängen des Baumes aus.

„Ähnlichkeiten"

Ähnliche Figuren :
- Quadrate
- gleichschenklige Dreiecke
- die unterschiedlichen Stufen zueinander

Broccoli: Bei 3 Stufen sieht es aus wie Broccoli, da die Baumäste sich immer wieder verfeinern. Bei mehr Stufen würde die Ähnlichkeit mit Broccoli verloren gehen.

warum diese Figuren ähnlich zueinander sind

$5^2 = a^2 + b^2$

$5^2 : 2 = 12,5$

$\sqrt{12,5} \approx 3,54$

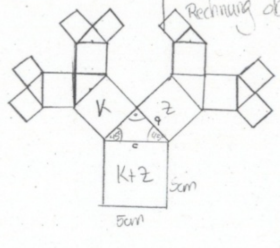
$a = b = 3,54$

$3,54 : 5 = \underline{\underline{0,708}}$ Ähnlichkeitsfaktor wenn $c = 5cm$ ist

Allgemein: $a = \sqrt{c^2 : 2}$

$a : c = k$

Rechnung oben. Beispiel!

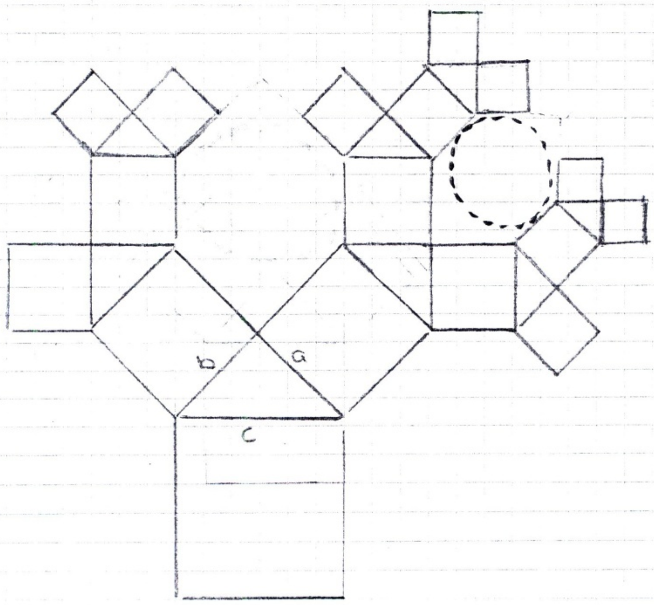


Schüleraufgaben mit Lösungen

Gruppe: Niklas, Nick, Felix, Christian, Nicola, Cilia

Aufgabe:

Jen, Otto, Lea und Kim spielen Fußball. Der Ball hat einen Umfang von 84 cm. Diesen Ball möchten sie durch einen Pythagorasbaum schießen.
Dieser hat ein Ausgangsdreieck $c = 50$ cm (Hypotenuse).
Passt der Ball durch das mittlere Loch?
Wie groß ist der Flächeninhalt des im Sechseck enthaltenen Kreises? Wie viel Fläche in cm² bleibt übrig oder fehlt, wenn der Ball gerade durchgeschossen wird?
Würde der Ball auch durch das rechte Loch passen? Schätze. Sind die beiden Löcher ähnlich zueinander? Wenn ja, was ist der Ähnlichkeitsfaktor? (Runde wenn nötig.)



1. $94\,cm : \pi \approx 30\,cm = d$ ⇒ Durchmesser des Balles

2. $50\,cm : 2 = 25\,cm$ ⇒ Radius des Kreises

$r_B = 15\,cm$ $r_K = 25\,cm$

3. $25\,cm \cdot 2 \cdot \pi = 157{,}08\,cm^2 = A_{KGE}$

$15\,cm \cdot 2 \cdot \pi = 94{,}25\,cm^2 = A_{Ball}$

4. $157{,}08 - 94{,}25\,cm \approx 62{,}83\,cm$

5. $a^2 + b^2 = c^2$

$a = b \rightarrow a^2 + a^2 = c^2$

$2a^2 = c$

$\sqrt{2a^2} = \sqrt{c^2}$

$c = a\sqrt{2}$

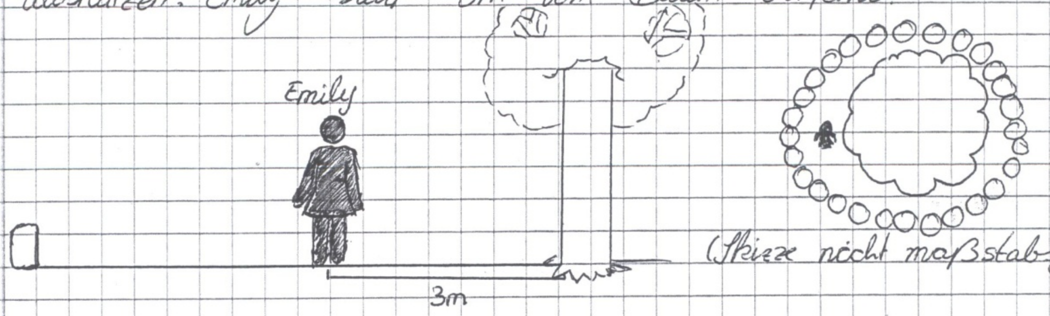
Radius des rechten Loches ≈ 3,5 cm

⇒ $50\,cm : \sqrt{2} = 35\,cm$

Der Ähnlichkeitsfaktor ist $\sqrt{2}$.
Die beiden Löcher sind ähnlich zueinander.

Der Baum:

a) Clara und Emily wollen die Höhe eines Baumes errechnen, der auf einem runden Platz steht. Sie wissen, dass der Platz einen Flächeninhalt von $A = 120\,m^2$ hat. Wie rechnen sie, wenn sie Emilys Körpergröße von 1,80m ausnutzen? Emily steht 3m vom Baum entfernt.



(Skizze nicht maßstabsgetreu)

Musterlösung:

Wir rechnen mit Hilfe des Flächeninhalts den Radius aus:

$\sqrt{120 : \pi} \approx 6{,}2$

Jetzt ermitteln wir das fehlende Stück um den 2. Strahlensatz anzuwenden:

$6{,}2m - 3m = 3{,}2m$

Dann wenden wir den 2. Strahlensatz an:

$\frac{3{,}2m}{1{,}8m} = \frac{6{,}2m}{x} \Leftrightarrow \frac{1{,}8m}{3{,}2m} = \frac{x}{6{,}2m} \quad | \cdot 6{,}2m$

$3{,}49m \approx x$

Der Baum ist 3,49m hoch.

Teilaufgabe b)

b) Vor zwei Jahren war der Baum nur 3m hoch.
Um wie viel Prozent ist er gewachsen?

Musterlösung:

$0{,}49 : 3{,}49 \approx 0{,}14$

Der Baum ist um ungefähr 14 % gewachsen.

Themenübergreifende Aufgabe:

Die Schüler der Klasse 9a werfen 3x eine Münze. Sie wollen die Versuchsergebnisse in einem symmetrischen Pythagorasbaum festhalten.
Um ihre Versuchsergebnisse der restlichen Klasse vorzustellen, wollen sie ihr Baumdiagramm aus einer $1m^2$ großen Pappe basteln.
Sie wissen, dass die Formel von der Hypothenuse zum gesamten Flächeninhalt des Pythagorasbaumes

$$3 \cdot \left(H^2 + \frac{(H:\sqrt{2})^2}{2}\right) + H^2 = A_{ges}$$

1. Wie groß muss die Ursprungshypothenuse ungefähr sein?
2. Kann man die Längen der weiteren Strecken genau bestimmen?
3. Wie groß ist der Umfang des Pythagorasbaumes?

Musterlösung:

zu 1.:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot \left(H^2 + \frac{(H:\sqrt{2})^2}{2}\right) + H^2 &= 10.000\,cm^2 \\
3 \cdot \left(H^2 + \frac{H^2:2}{2}\right) + H^2 &= 10.000\,cm^2 \\
3H^2 + 3\,\frac{H^2:2}{2} + H^2 &= 10.000\,cm^2 \\
4H^2 + 3\,\frac{H^2:2}{2} &= 10.000\,cm^2 \\
4H^2 + \frac{3H^2:2}{2} &= 10.000\,cm^2 \quad | \cdot 2 \\
8H^2 + 6H^2 : 2 &= 20.000\,cm^2 \\
11H^2 &= 20.000\,cm^2 \quad | : 2 \\
5{,}5H^2 &= 10.000\,cm^2 \quad | : 5{,}5 \\
H^2 &= 1.818{,}\overline{18}\,cm^2 \quad | \sqrt{} \\
H &\approx 42{,}6\,cm
\end{aligned}
$$

2.: Da der Vergrößerungsfaktor $\sqrt{2}$, eine irrationale Zahl, beträgt und das Produkt aus einer irrationalen und einer rationalen Zahl stets irrational ist, reichen allein rationale Zahlen nicht zur Darstellung der Längen des Pythagorasbaumes aus.

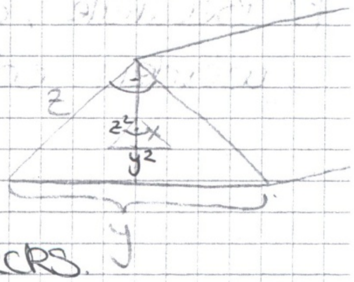
3.: $8cm + 16\sqrt{2}\,H \quad = \quad U$

$8cm + 16\sqrt{2}\,42{,}6cm \quad = \quad 971{,}93\,cm$

Daniel Steenebrügge, Lino Wimmer, Oliver Louis, Franziska Hoppe, Gina Fischer, Amelie Semeling

Aufgabe

Es soll ein neues Haus gebaut werden. Das Dach soll die Form eines dreieckigen Prismas haben, wobei die Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck darstellt.



a) Die Katheten des Dreiecks sind $z = 7,5$ m lang.
Berechne die Höhe des Dreiecks.

b) Man möchte ein Fenster in die dreieckigen Grundfläche einbauen, das dieselbe Form hat wie die Grundfläche des Prismas.
Bestimme den Ähnlichkeitsfaktor k, wenn $y_2 = 2,12$ & $z_2 = 1,5$

c) Wie hängt die Höhe mit dem Flächeninhalt eines Dreiecks zusammen?
Erkläre schriftlich.
Berechne aufgrund der Informationen den Flächeninhalt und den Umfang der beiden Dreiecke.

d) Beweise die Rechtwinkligkeit des großen Dreiecks mithilfe des Satzes des Thales

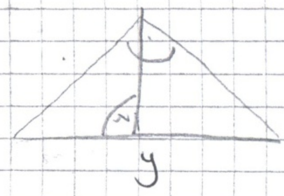
e) Es wird eine statistische Erhebung durchgeführt.
Die Warscheinlichkeit, dass solch ein Dach einstürzt, beträgt 5%.
Von allen gebauten Dächern sind 9,9%

beschädigt. 4,9% aller Dächer sind beschädigt und stürzen daraufhin.
Stelle die Vierfeldertafel und die dazugehörigen Baumdiagramme auf.

f) Beurteile, ob die Dächer stabil gebaut werden oder nicht. Begründe.

Musterlösung:

a)



gegeben: $z = 7{,}5m$

gesucht: y, x

$y^2 = 2z^2$ | $x^2 = z^2 - \frac{1}{2}y^2$
$y^2 = 7{,}5^2 + 7{,}5^2$ | $x^2 = 7{,}5^2 - 5{,}3^2$
$y^2 = 112{,}5 \quad |\sqrt{\ }$ | $x^2 = 28{,}16$
$y \approx 10{,}6$ | $x \approx 5{,}3$

b) gegeben: $y_2 = 2{,}12m$ $h = 1{,}06m$
$z_2 = 1{,}5m$ $\frac{1}{2}y = h$

ges: k

$\frac{7{,}5}{1{,}5} = 5$ $\frac{10{,}6}{2{,}12} = 5$

$k = 5$

c) Um den Flächeninhalt eines Dreiecks zu errechnen, muss man zunächst die Grundseite mit der Höhe multiplizieren. Dieses Ergebnis wird wiederum durch zwei geteilt.

Formel: $\frac{g \cdot h}{2} = A_{Dreieck}$

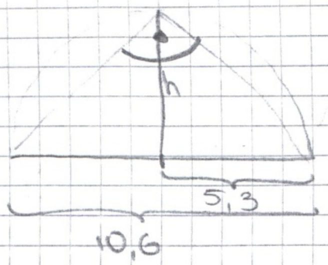
Kleines Dreieck:

A: $\frac{2{,}12m \cdot 1{,}06m}{2} \approx 1{,}12m^2$ U: $2 \cdot 1{,}5m + 2{,}12m = 5{,}12m$

großes Dreieck:

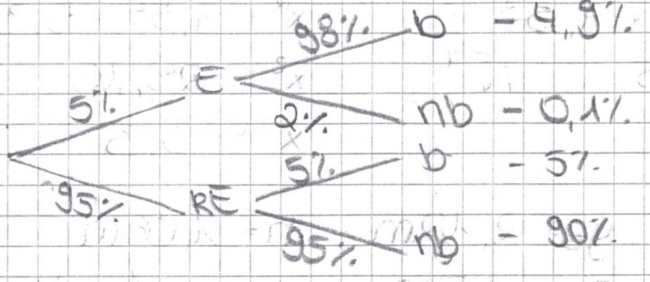
A: $\frac{10{,}6m \cdot 5{,}3m}{2} \approx 28{,}09m^2$ U: $2 \cdot 7{,}5m + 10{,}6m = 25{,}6m$

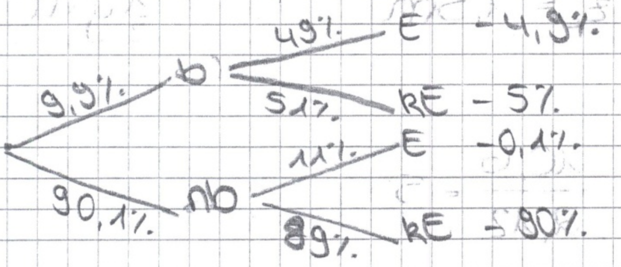
d)



5,3=r

e)





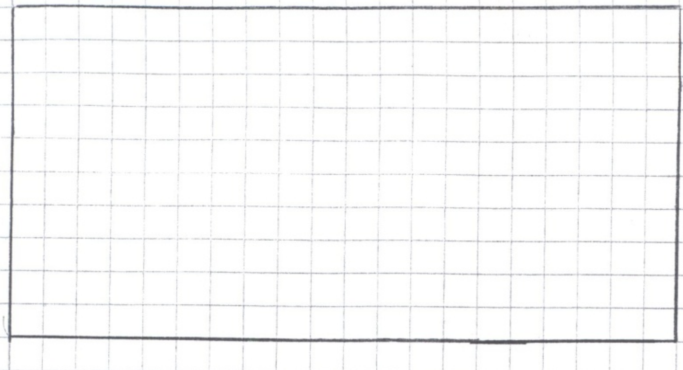
	Einsturz	kein Einsturz	gesamt
beschädigt	4,9%	5%	9,9%
nicht besch.	0,1%	90%	90,1%
gesamt	5%	95%	100%

f) unsicher

5% der Dächer stürzen ein

falls beschädigt, stürzen 49% ein

falls nicht beschädigt, stürzen trotzdem 11% ein



Aufgabenstellung: Leonie möchte ein Blumenbeet anlegen.
In der Mitte des Gartens befindet sich
ein Teich mit einem Radius von 1,5 m.
Die komplette Gartenfläche beträgt $50 m^2$.

a) Wie groß ist die Fläche des Teiches?
b) Auf $1 m^2$ kann sie 13 Blumen pflanzen. Wie
viele Blumen kann sie insgesamt auf der Garten-
fläche anlegen?
c) Biene Maja fliegt über Leonies Blumenbeet.
Sie besteubt 65% aller Blumen. 70% davon sind
Tulpen. 33% der Tulpen werden nicht besteubt.
Zeichne nun beide Baumdiagramme und die
dazugehörige Vierfeldertafel.
(1) Wenn man eine Tulpe pflücht, wie groß ist die
Warscheinlichkeit, dass sie besteubt ist?
(2) Man pflückt eine nicht besteubte Blume. Wie
groß ist die Warscheinlichkeit, dass es eine
Rose ist?
(3) Biene Maja setzt sich auf eine Blume. Wie groß ist die
Warscheinlichkeit, dass es eine Tulpe ist?

d) Leonie hat zur Anlegung des Gartens ein Model angefertigt. Aus Spaß hat er auf eine der Blumen eine Biene gesetzt, die 0,5 cm lang ist.
In welchem Maßstab ist das Modell gebaut?

Lösung

Aufgabe a)

$r_{Teich} = 1,5m$

$1,5m^2 \cdot \pi \approx 7,07m^2$

A: Der Teich hat eine Fläche von $7,07m^2$.

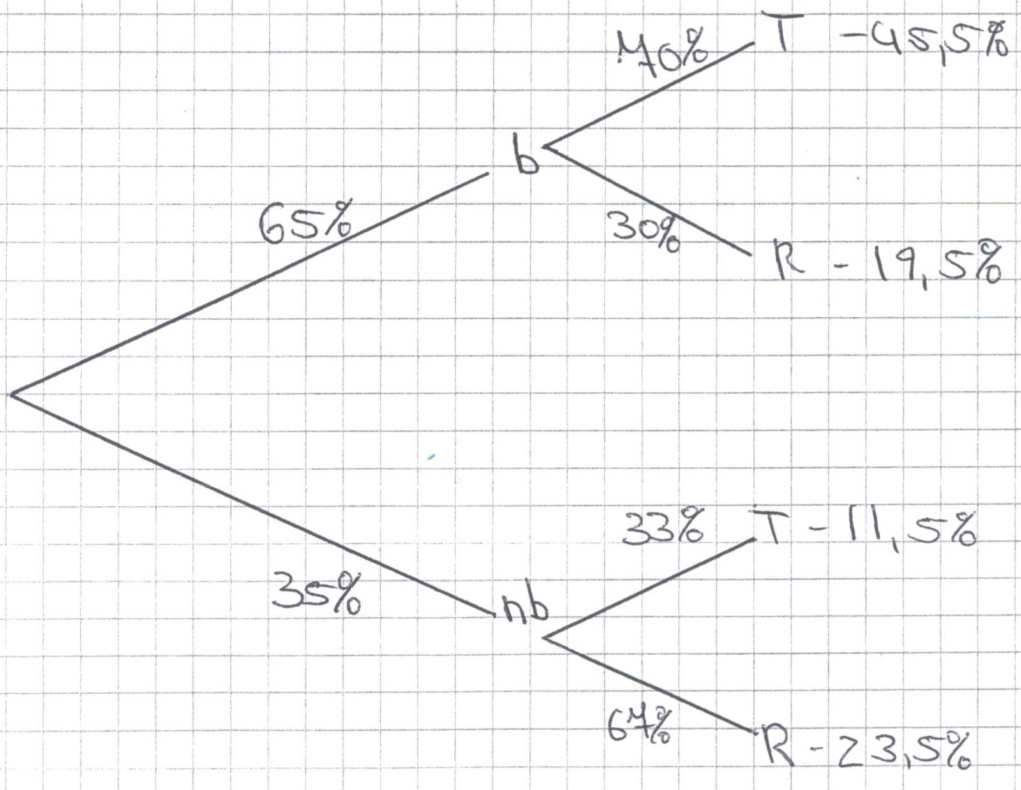
Aufgabe b)

$50m^2 - 7,07m^2 = 42,93m^2$

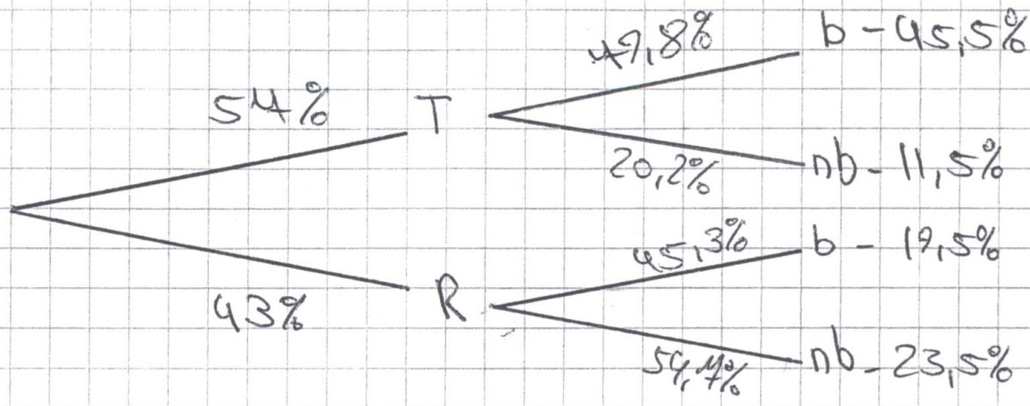
$42,93 \cdot 13 \approx 558$

A: Es können 558 Blumen angepflanzt werden.

Aufgabe c)



	b	nb	ges
Tulpen	45,5%	11,5%	54%
Rosen	19,5%	23,5%	43 %
ges	65%	35%	100%



1) 47,8%

2) 64%

3) 54%

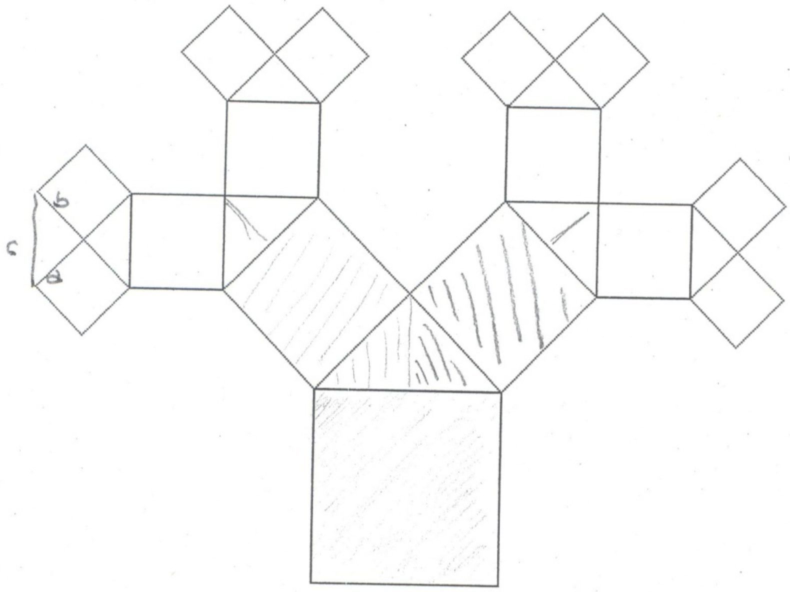
Aufgabe d)

$2 : 0{,}5 = 4$ Vergrößerungsfaktor 4

Maßstab 1 : 4

Schülerideen zur Einstiegsaufgabe

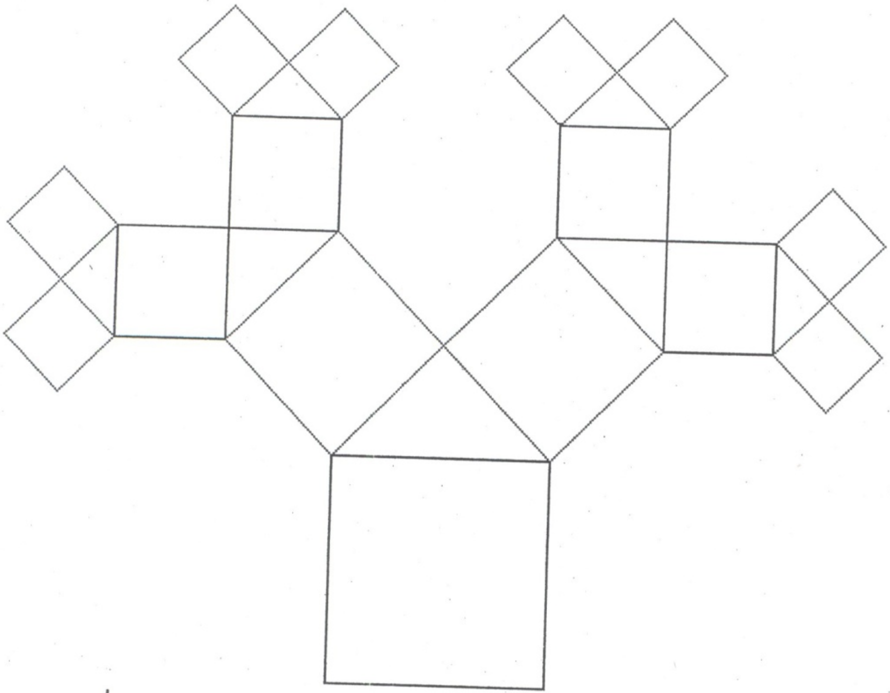
Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



- Die Quadrate sind ähnlich zueinander, und die Dreiecke ebenfalls.
- Man kann die Figur mit dem Satz des Pythagoras erweitern.
  $a^2+b^2=c^2$ c = neue seite
- Die Figur ist deckungsgleich.

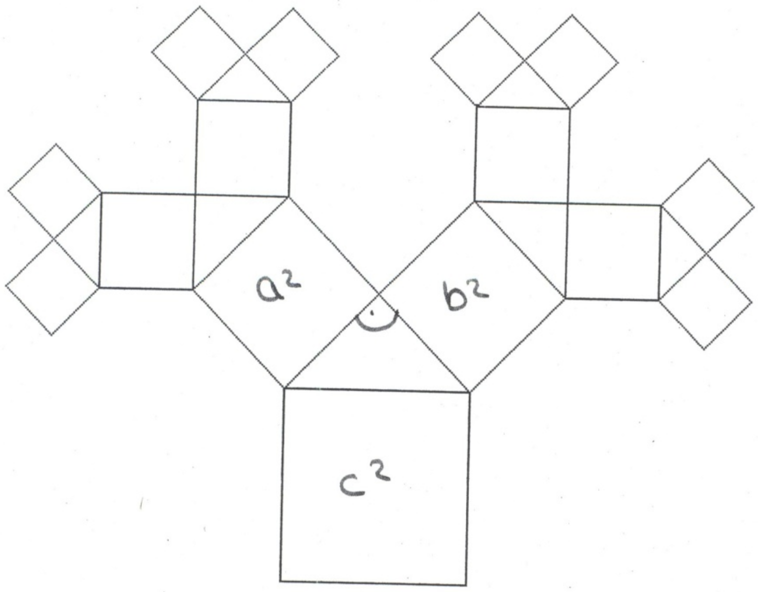
- Die Figur hat die Form eines Baumdiagrammes.
  (großes Quadrat = das Ganze, dann zwei Hauptstränge und ~~zwei~~ jeweils zwei weitere kleinere Stränge)

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



Zu diesem Bild fällt mir der Satz des Pythagoras ein $c^2 = a^2 + b^2$. Das bedeutet, dass die beiden Kathetenquadrate zusammen soviel ergeben wie das Hypotenusenquadrat. Der Satz des Pythagoras ist nur bei rechtwinkligen Dreiecken anzuwenden.

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?

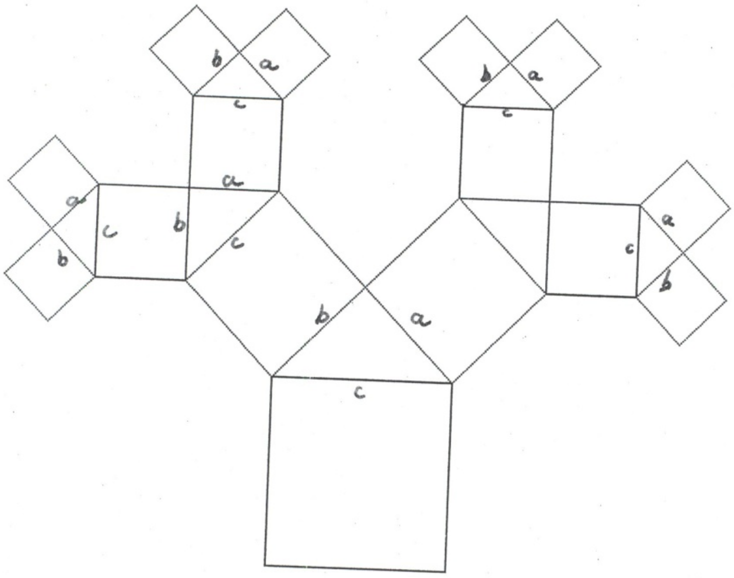


Das ist ein Bild zur Veranschaulichung zum Satz des Pythagoras.
Es gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

wobei das große Quadrat ~~oder~~, das aus der Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks gebildet wird, die Summe der Quadrate, gebildet aus den Katheter des Dreiecks, hat
Das Bild führt den Satz immer weiter in kleinere Dreiecke und Quadrate. Immer gilt $a^2+b^2=c^2$
Der Satz gilt nur, falls das Dreieck rechtwinklig ist.

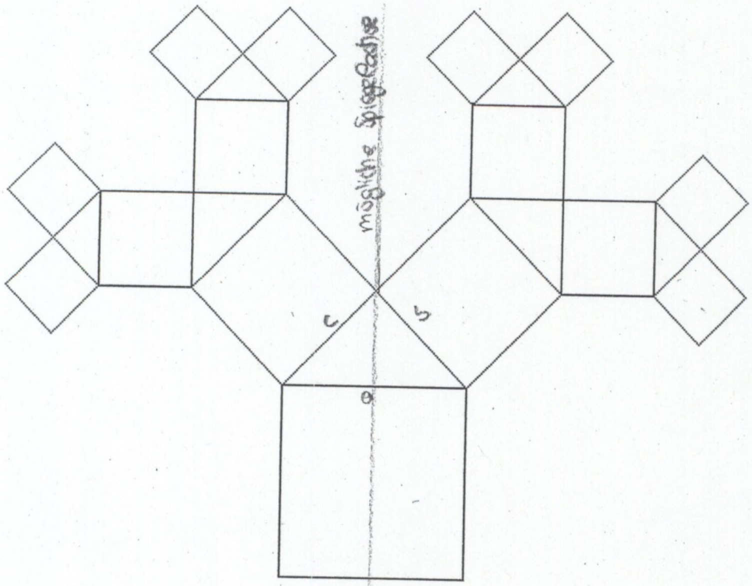
Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



Bei dem Bild geht es um den Satz des Pythagoras. Dieser lautet $a^2+b^2=c^2$. Hierbei steht c zunächst immer alleine auf einer Seite der Gleichung.
a^2 ist das Quadrat über der Seite a, b^2 das über der Seite b und c^2 das über der Seite c.
c ist immer die Hypothenuse, a und b sind die Katheten.
c ist immer die längste Seite und befindet sich immer gegenüber des rechten Winkels des rechtwinkligen Dreiecks.
$a^2+b^2=c^2$ bedeutet also, dass die Quadrate über b und über a zusammen so groß sind wie das Quadrat über c.
Standartmäßig rechnet man mit dem Satz des Pythagoras die Länge der Seite c aus, man kann ihn aber auch nach a oder b wie folgt umstellen: $a^2+b^2=c^2 \rightarrow a^2=c^2-b^2$

$a^2+b^2=c^2 \rightarrow b^2=c^2-a^2$

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



Satz des Pythagoras $a^2+b^2=c^2$ $c^2-a^2=b^2$ $c^2-b^2=a^2$

15 Quadrate 7 gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke sind in diesem Gebilde zu sehen.

Die Dreiecke müssen einen rechten Winkel und zwei 45° Winkel haben.

Die Quadrate sind ähnlich zueinander.

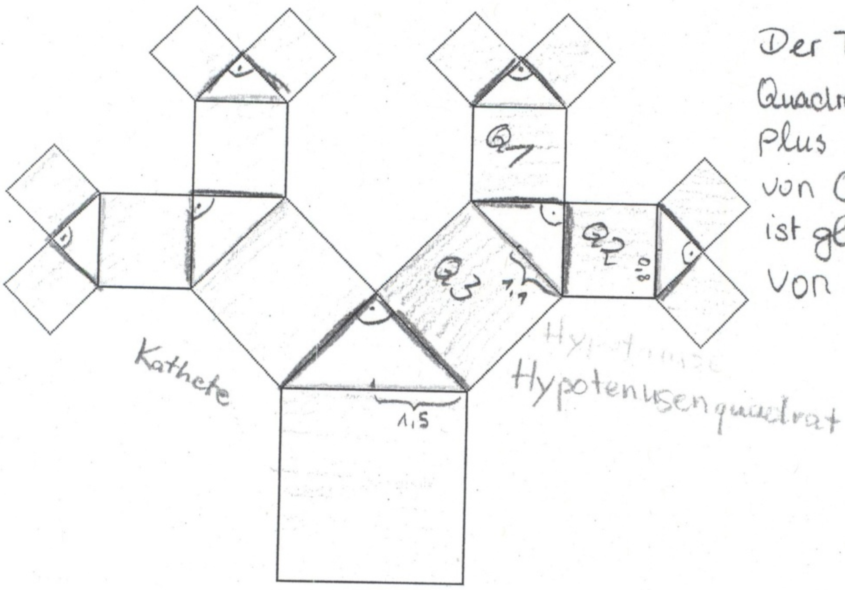
Die Dreiecke sind ebenfalls ähnlich zueinander.

Das Bild ist mathematisch und geometrisch konstruierbar.

Wenn man eine seitenlänge hat, kann man alle anderen ausrechnen.

Das ist der Pythagoras-Baum.

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?

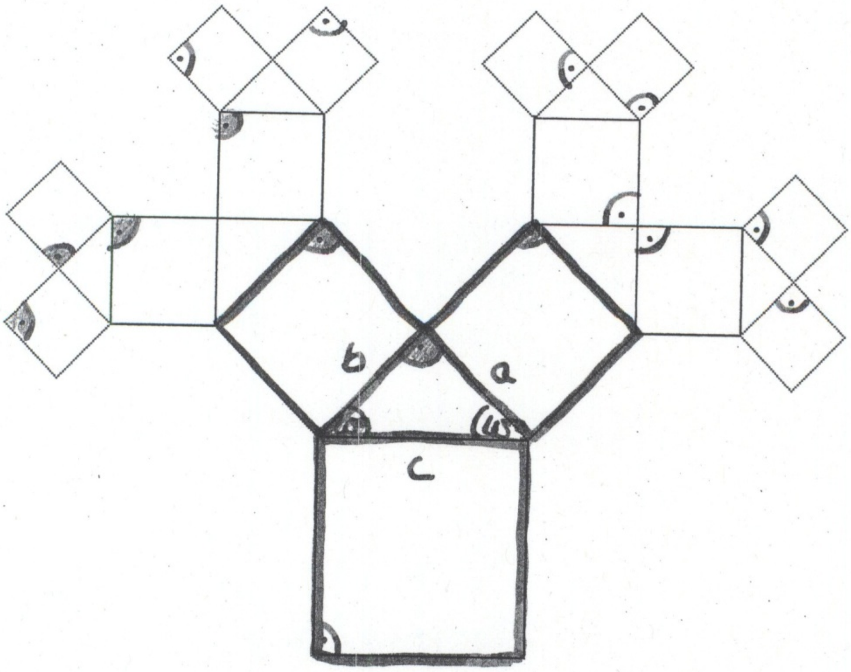


Der Flächeninhalt von Quadrat 1 zum Quadrat plus den Flächeninhalt von Quadrat 2 zum Quadrat ist gleich dem Flächeninhal von Q3 zum Quadrat

Diese Figur hat etwas mit dem Satz des Pythagoras zu tun.

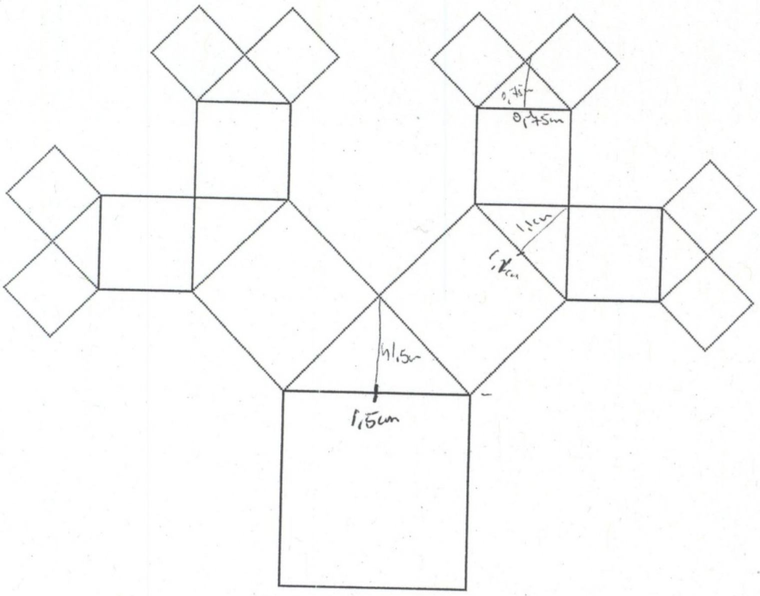
Der Satz des Pythagoras lautet: $a^2 + b^2 = c^2$

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?

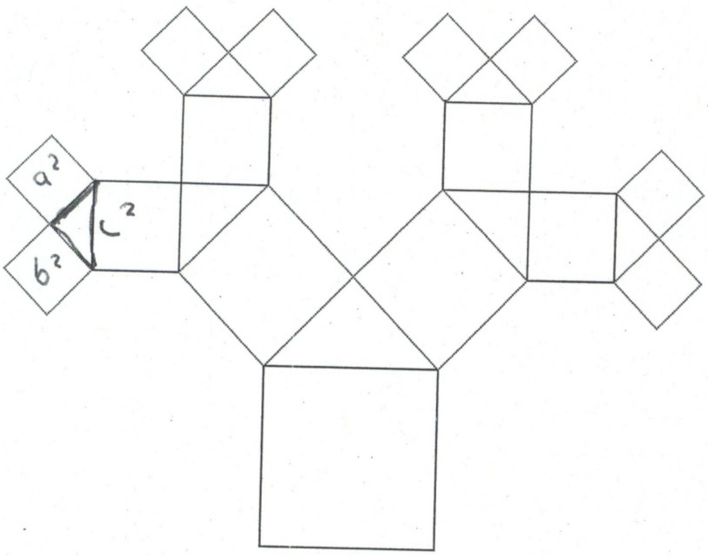


- Der Satz des Pythagoras wird hier angewendet.
  - Die Formel, durch die das Bild entsteht lautet: $a^2+b^2=c^2$.
  - Die Dreiecke sind rechtwinklig.
  - Die Vierecke sind Quadrate
  - Da das Dreieck rechtwinklig ist, ist der Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate.

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



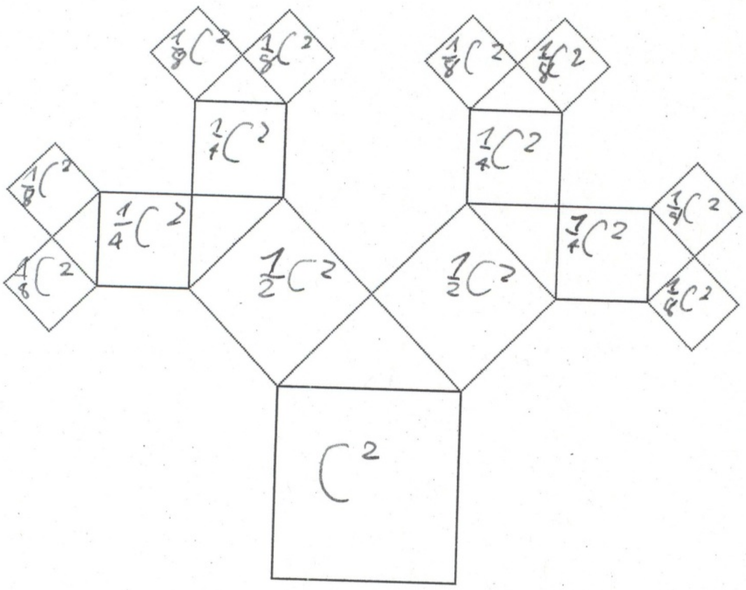
Die, auf dem Bild zu erkennende, Dreiecke sind alle rechtwinklig.
Das bedeutet für jedes Dreieck gilt der Kehrsatz des
Satzes des Pythagoras: $a^2+b^2=c^2$; $\Rightarrow \gamma = 90°$.
Auf dem Bild sind außerdem noch ein Hypotenusenquadrat
und Kathetenquadrate zu erkennen. Der Flächeninhalt
der Quadrate wird nach oben hin immer kleiner, nämlich
pro „Reihe" um die Hälfte.



1) Dieses Bild errinert mich auf den ersten Blick an den Grundriss eines Würfels. Auf den zweiten Blick sieht es so aus als ob die Figur aus immer wieder kleiner werdenden Drei- und Vierecken besteht.

2) Satz des Pythagoras; Ähnlichkeit

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?

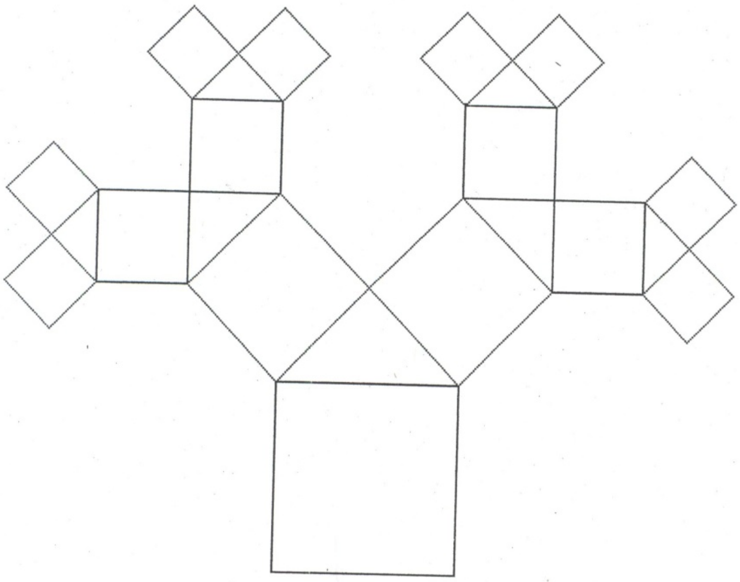


Satz des ~~B~~ Pythagoras

15 Quadrate 7 gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke

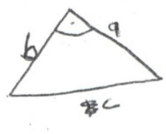
Sie sind wahrsch. ähnlich zueinander

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?

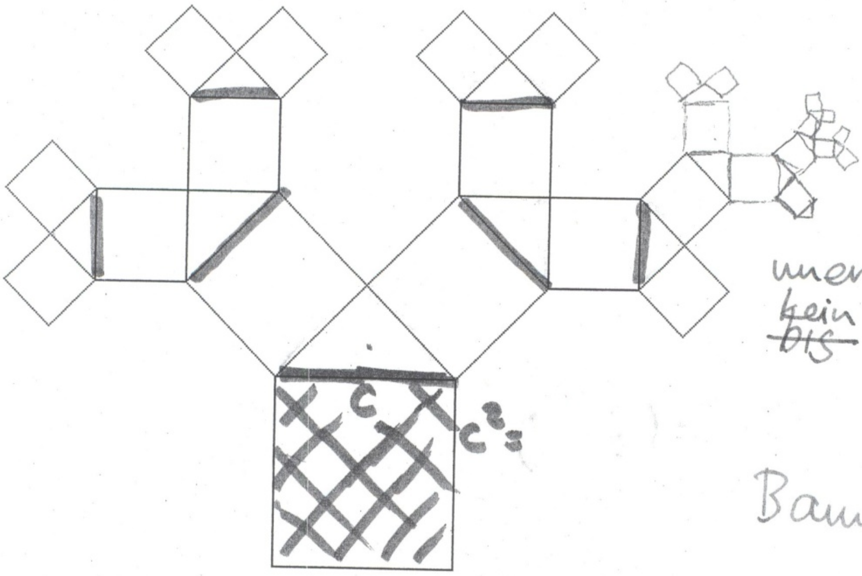


Auf dem Bild erkent man eine Skizze zum Satz des Pythagoras. Dieser sagt aus, ~~das~~ dass ~~beide~~, wenn beide Katheten quadriert und das Ergebnis addiert, man das Quadrat der Hypothenuse erhält. Der Satz des Pythagoras gilt nur bei rechtwinkligen Dreiecken. Die Formel lautet:

$$a^2+b^2=c^2$$



Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



unendliche Figur

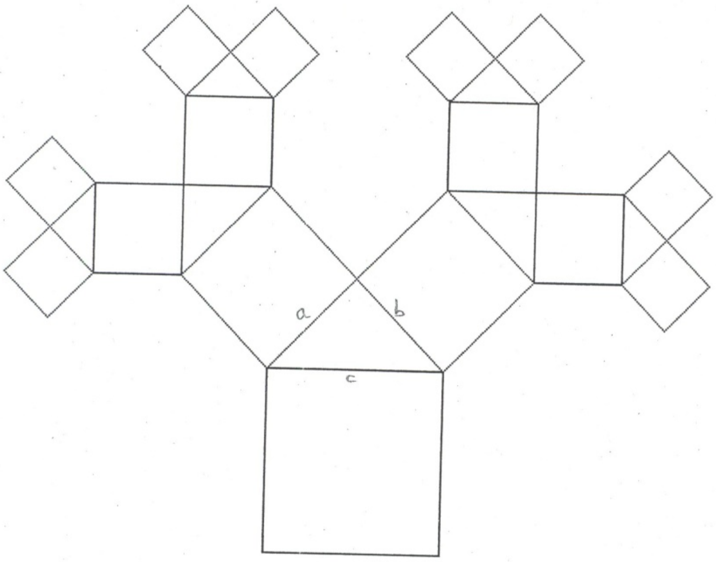
kein ~~bis~~ Zusammenstoß

Baumdiagramm

Satz des Pythagoras $= c^2 = a^2 + b^2$

Der Abstand zwischen den Quadraten schrumpft proportional zu den Quadraten $\Rightarrow$ kein Zusammenstoß

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?

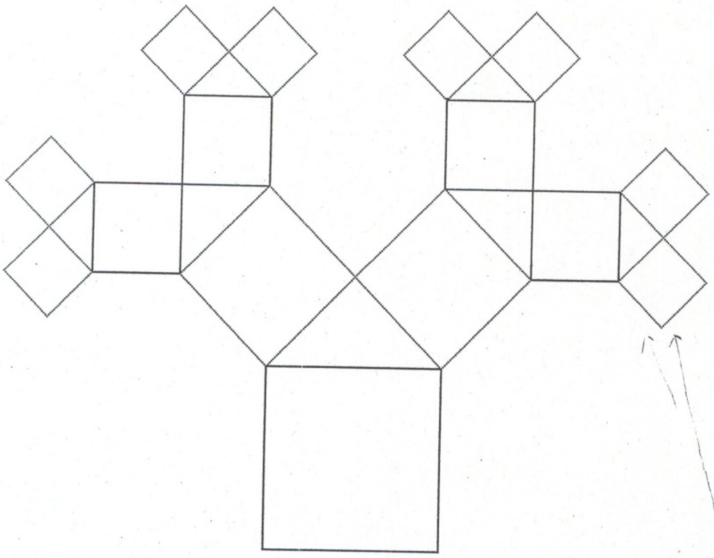


$\boxed{a^2+b^2=c^2}$

Um* das Hypothenusenquadrat und die Kathetenquadrate auszurechnen, wird der Satz des Pythagoras angewendet.

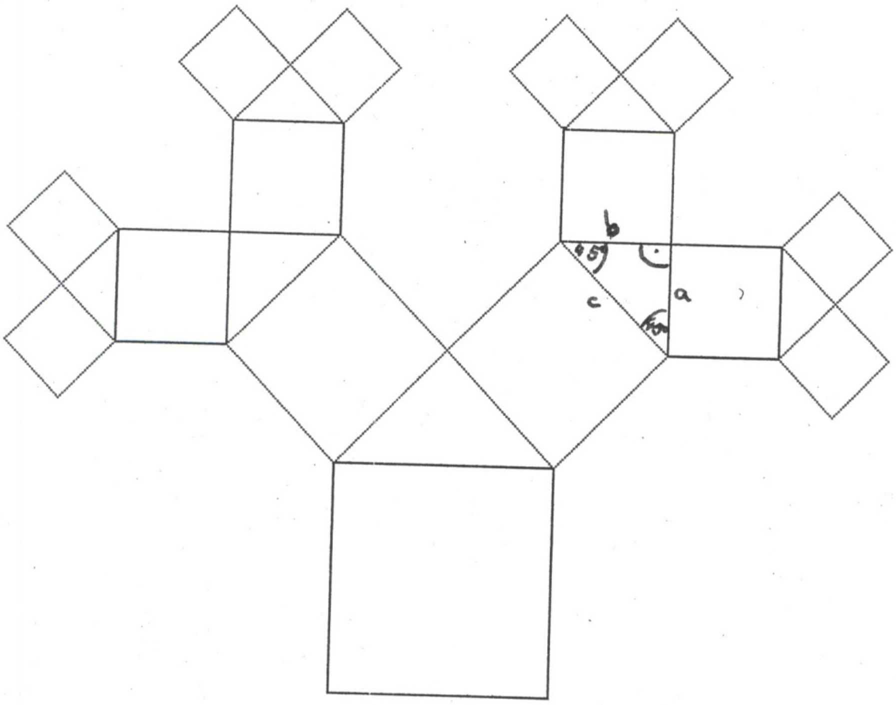
* den Flächeninhalt

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



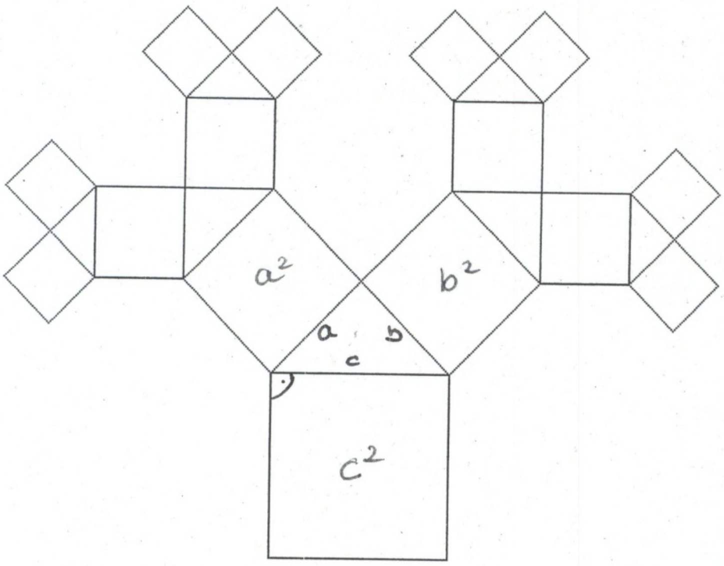
Man kann mit den Satz des Pythagoras die gepunkteten Linien durch rechnen rausfinden.
Wenn man sich ~~das~~ die Skizze flüchtig ansieht könnte man denken, dass man es ausschneiden muss und zu einer Form basteln soll z.B. wie einen Würfel.

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



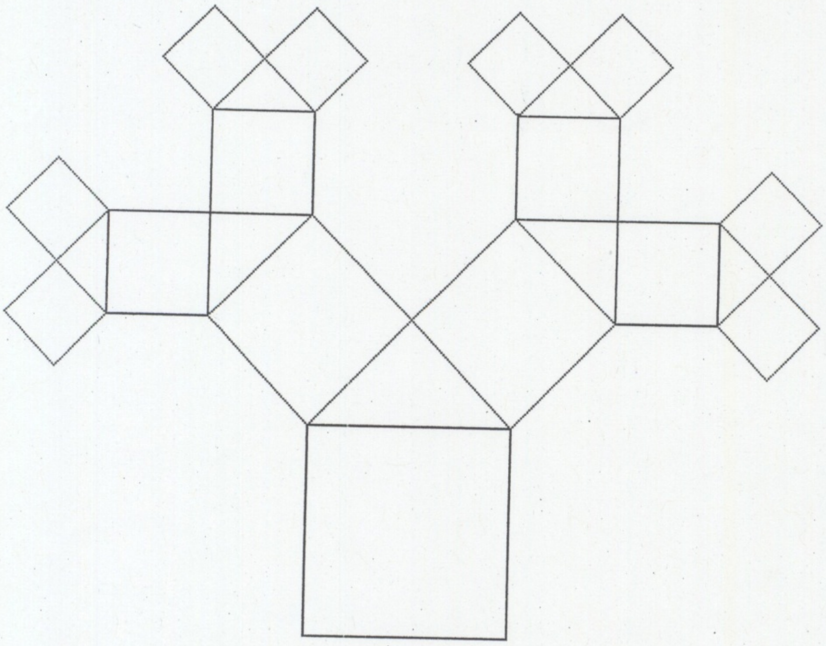
- Den Satz des Pythagoras kann man hier anwenden.
  - $a^2 + b^2 = c^2$ ist die Formel durch die das Bild entsteht.
  - Die Dreiecke ist rechtwinklig.
  - Die Vierecke sind Quadrate.
  - Der Flächeninhalt von c ist gleich der Summe von dem Flächeninhalt von a und b wenn das Dreieck rechtwinklig ist.
  - Der Radius halbiert sich nicht. -> $\sqrt{2} \cdot a = c$

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



- In den Dreiecken erkennte ich den Satz des Pythagoras wieder. Die Seite c ist die Hypothenuse und die Seiten a und b sind die Katheten
Demnach gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

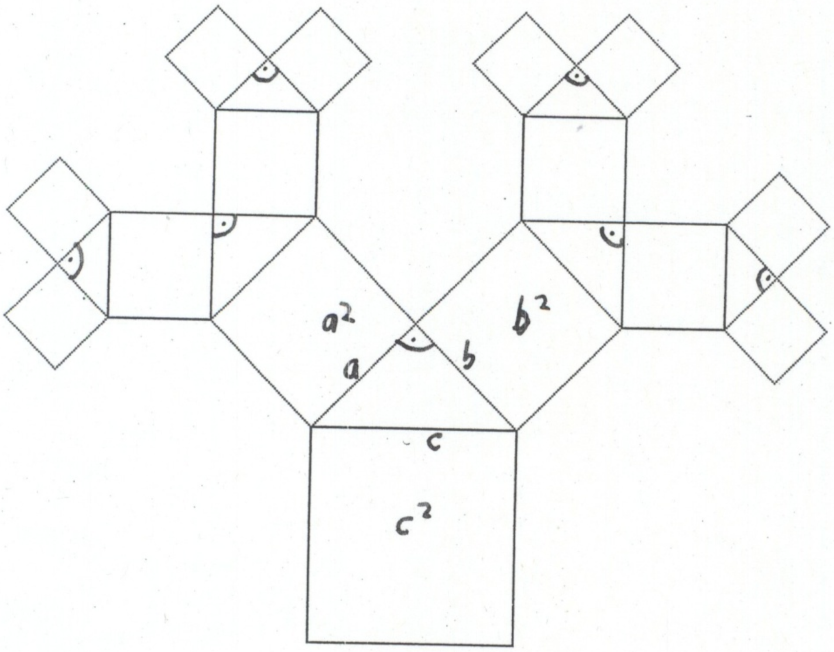
Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



- Satz des Pythagoras
- Ähnlichkeit
- Höhensatz (Dreieck)

Zu diesem Bild fallen mir mehrere Themen ein. Zum Beispiel die "Ähnlichkeit". Die Quadrate und Dreiecke sind ähnlich zueinander. Mit Hilfe des "Satzes des Pythagoras" kann man die Seiten (Kanten) der Dreiecke berechnen.
Der "Höhensatz" hilft bei der Berechnung der an den Dreiecken anliegenden Quadraten.

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



Zu dieser Figur fällt mir der Satz des Pytagoras ein:

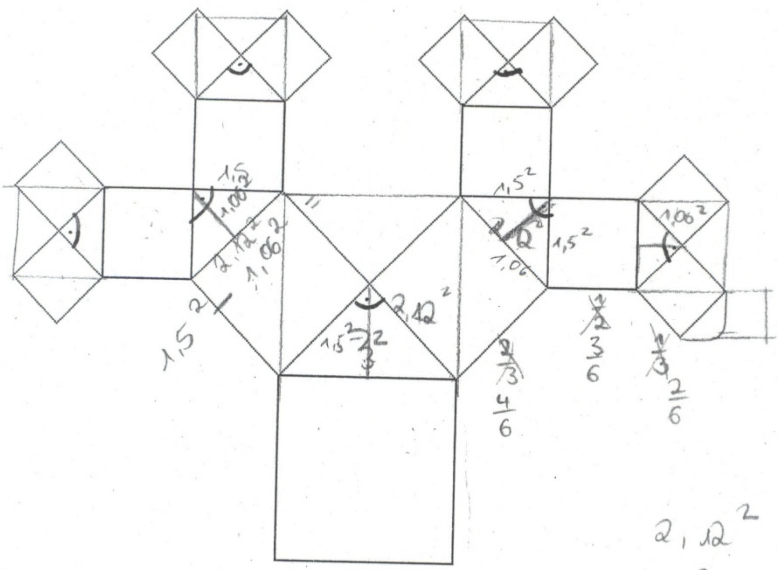
$a^2 + b^2 = c^2$

Dieser Satz gilt nur bei rechtwinkligen Dreiecken
Man benutzt ihn um eine fehlende Seite zu errechnen
Beispiel:

$a = 4cm$
$c = 6cm$
$b = ?$

$a^2 + b^2 = c^2 \quad | -a^2$
$b^2 = c^2 - a^2$
$b^2 = 36 - 16$
$b^2 = 20 \quad | \sqrt{\ }$
$b = \sqrt{20}$
$b \approx 4{,}47cm$

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



$\frac{7}{10}$ / $\frac{7}{10}$ / $\frac{7}{10}$

$2{,}12^2 + 2{,}12^2 = 3^2$
$1{,}5^2 + 1{,}5^2 = 2{,}12^2$
$1{,}06^2 + 1{,}06^2 = 1{,}5^2$

- Satz des Pythagoras
- Die nächsten zwei Quadrate sind genauso groß wie das darunter
- Das rechtwinkelige Dreieck, welches zum unteren Quadrat gehört, teilt die darüberliegenden Quadrate gleichmäßig auf
- $a^2 + b^2 = c^2$

$c^2 = a^2 + b^2$

$4 \cdot c^2 +$

$g \cdot h \cdot 2$

$2{,}25 \cdot 2{,}25 : 2 \approx 2{,}53$

$1x$

$2x \approx 0{,}56$

$\approx 0{,}28$

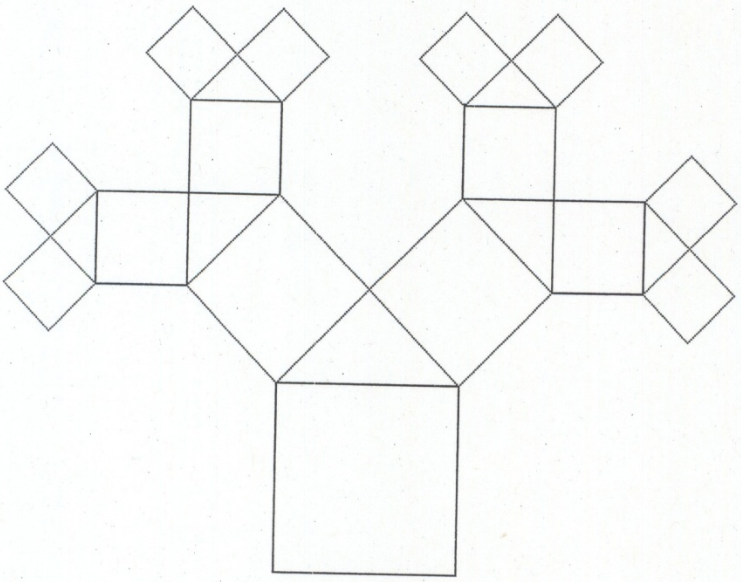
$4x$

$\frac{1}{2}c = h$

$3{,}37 + 4 \cdot 3^2$

$3{,}37 + 36 \quad 39{,}37 \approx \boxed{40\ cm}$

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?

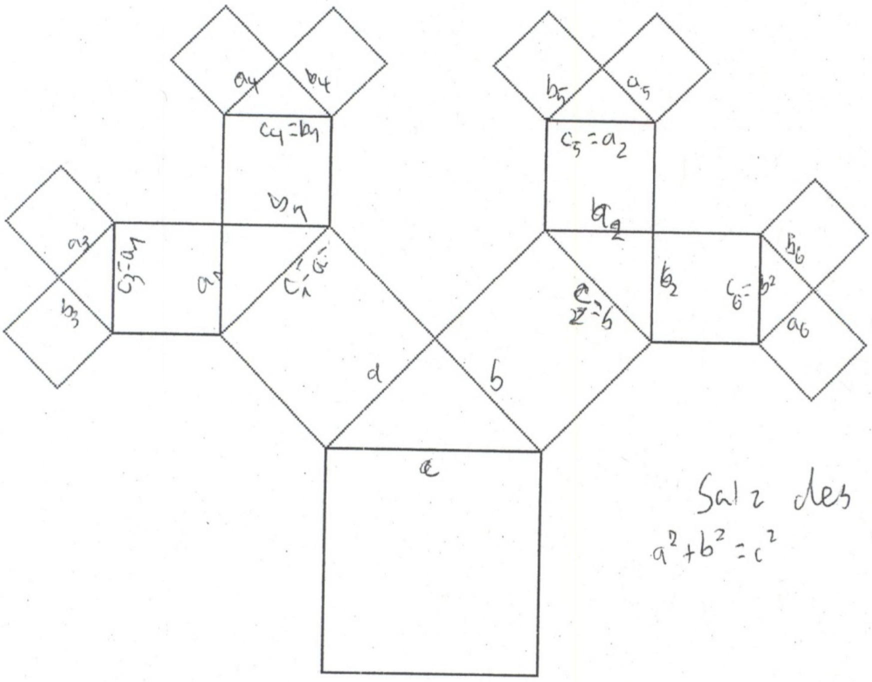


Das untere Quadrat hat den gleichen Flächeninhalt
wie die zwei mittleren 4 kleine oder ~~oder~~ die acht sehr kleinen.
~~auch vier kleine da~~

Es gilt der satz des Pythagoras. Alle „Hilfsdreiecke"
sind gleichschenklig.

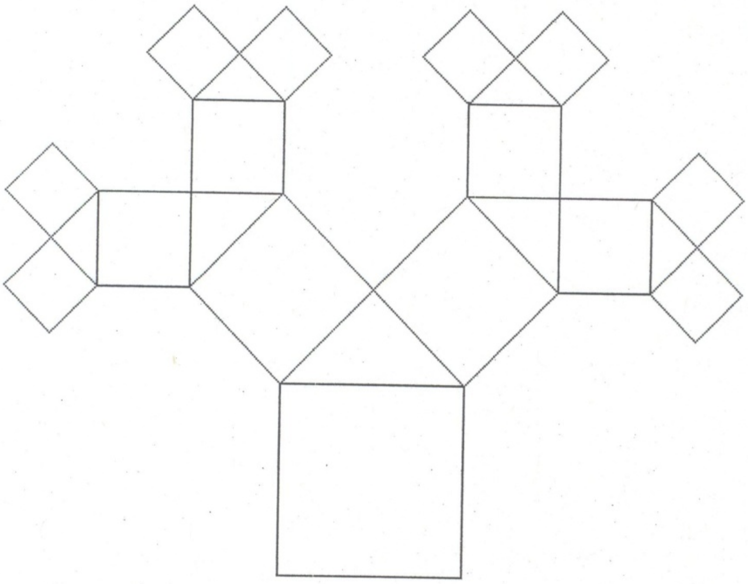
Die beiden kürzeren Seiten eines Dreiecks zum Quadrat ergeben
das Quadrat der längen Seite.

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



Satz des Pythagoras
$a^2 + b^2 = c^2$

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?

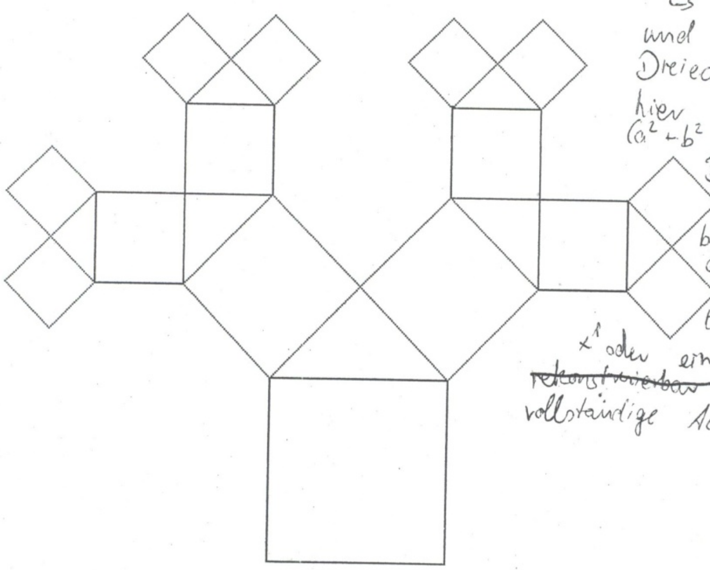


Zu diesem Bild fallen mir folgende Sätze ein.
-Satz des Pythagoras, weil man die gepunkteten Linien ~~durch~~ ausrechnen kann.

Außerdem ~~[illegible]~~ könnte das Bild ein Baumdiagramm darstellen.

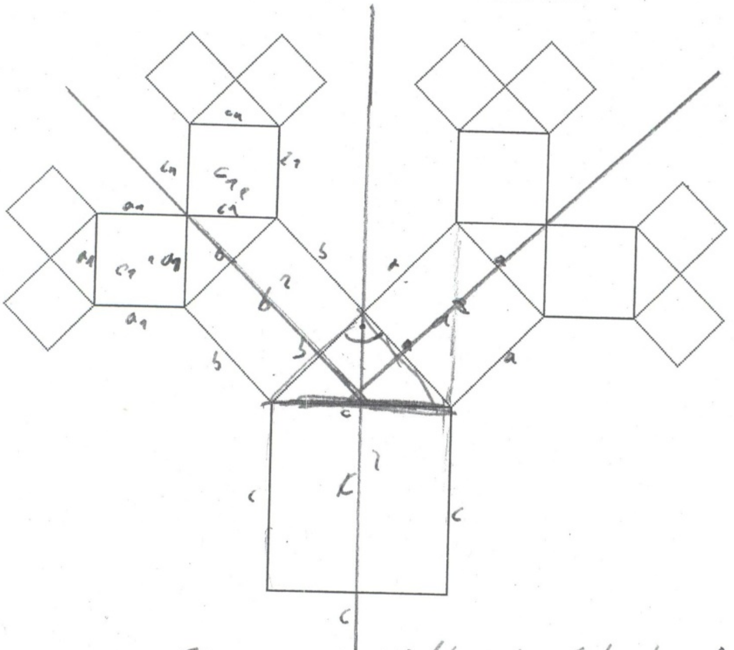
~~[illegible]~~ Auch könnte man das Bild ausschneiden und ~~[illegible]~~ damit eine Figur basteln.

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



Es handelt sich um Quadrate und gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke. Das heißt man kann hier den Satz des Pytagoras anwen ($a^2 + b^2 = c^2$). Wenn man also die Basis x oder eine andere Seite eines Dreiecks kennt, so kann man auch alle anderen Se bestimmen. Außerdem genügt die auch um Umfang und Flächeninhalt zu berechnen bereits die Angabe einer Seite. Das heißt, d ~~die rekonstruierbar macht.~~ ~~Bild vollständig~~ ~~Auskunft~~ über dieses Bild vollständige Auskunft gibt.

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



$c = \sqrt{2}\,a$

$c^2 = 2a^2 \quad | \sqrt{\ }$

$b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{c^2}{4}$

$2 \cdot (b^2 \cdot (b^2 - \frac{c^2}{4})) = b^2$

$2 \cdot (b^4 - \frac{b^2 c^2}{4}) = b^2$

$2b^4 - \frac{\cancel{2} b^2 c^2}{\cancel{4}\,2} = b^2$

$2b^4 - \frac{b^2 c^2}{2} = b^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\sqrt{2b^4 - \frac{b^2 c^2}{2}} = b$

Diese Figur verdeutlicht den Satz des Pythagoras.
Sie stellt die Formel $a^2 + b^2 = c^2$ dar. Desweiteren können mit den Höhen der Dreiecke irrationale Zahlen dargestellt werden.
Zudem besteht eine Ähnlichkeit zwischen den einzelnen Quadraten und rechtwinkligen Dreiecken, was wiederum teilweise auf den Satz des Pythagoras zurückzuführen ist.

Die Figur lässt sich so beschreiben:

$a^2 + (a_1^2 + c_1^2) = c_1^2$

$c : \sqrt{2} = b$

$b^2 + b^2 = c^2$

$H : \sqrt{2} = K$

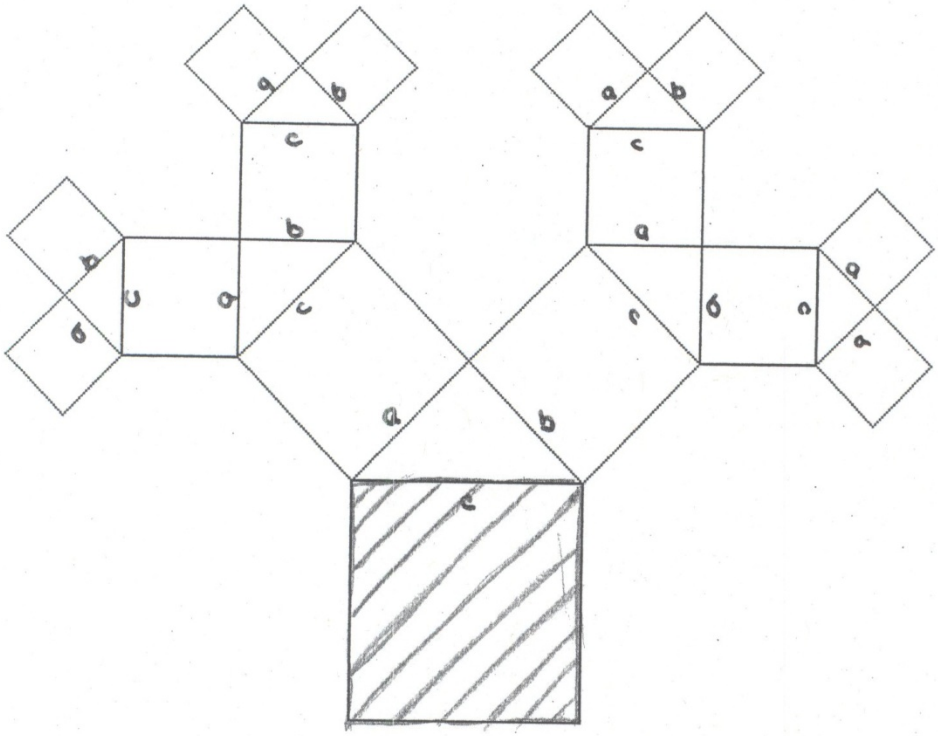
$A_{Dreieck} = \frac{K^2}{2}$

$a_1^2 + a_1^2 + c_1^2 + c_1^2 = c^2 + H^2$

$A_{Dreieck} = \frac{(H : \sqrt{2})^2}{2}$

$\left(H^2 + \frac{(H : \sqrt{2})^2}{2}\right) = A_{ges}$

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



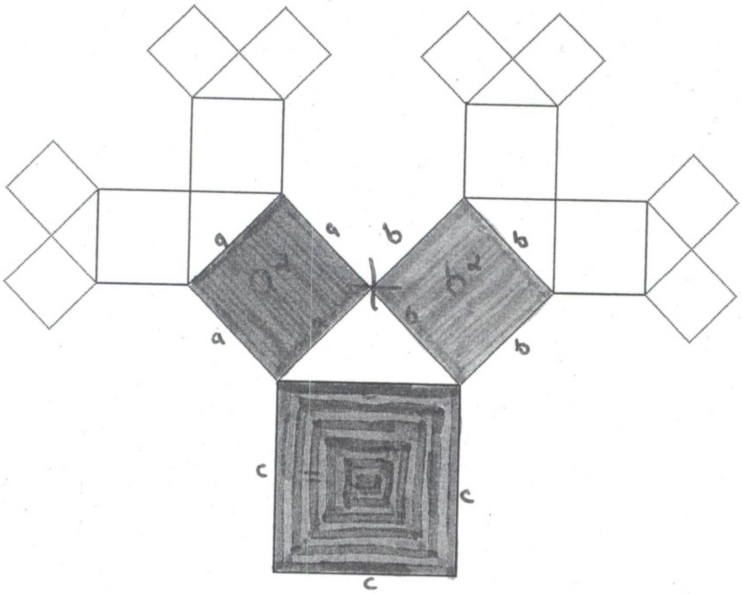
→ Satz des Pythagoras - $a^2 + b^2 = c^2$

→ Die Dreiecke in dieser Figur sind rechtwinklig!

→ Diese Figur könnte man immer weiter führen, da sie immer mit der gleichen Anordnung strukturiert ist.

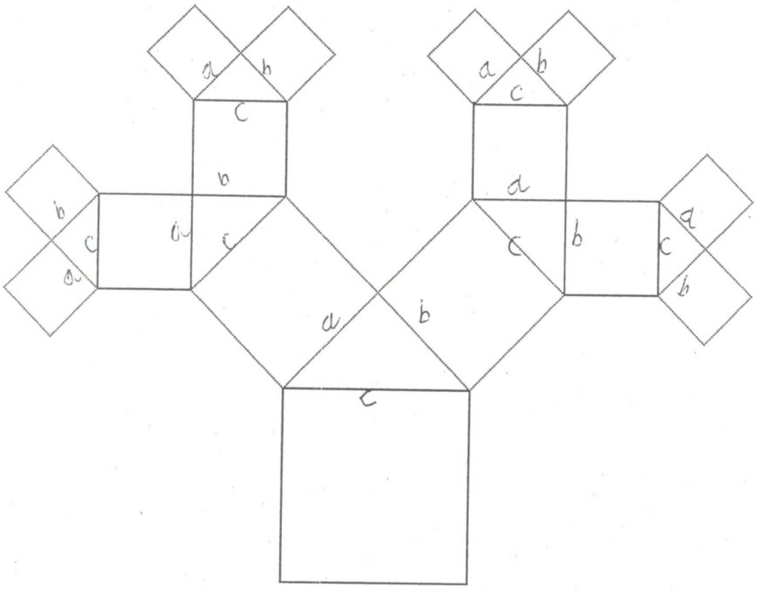
→

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



- die Drei- und Vierecke sind jeweils ähnlich zueinander
- der Satz des Pythagoras ist an dieser Figur anwendbar
- die beiden sich mit der Spitze berührenden Quadrate sind gleich groß
-

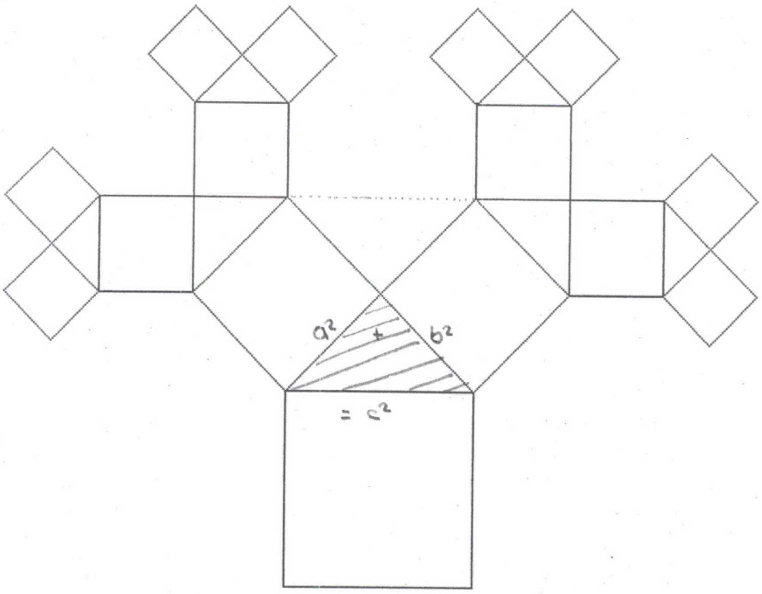
Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



Das Bild lässt sich unendlich weiter führen die werden immer kleiner
Die kleinen Quadrate sind zusammen genauso groß wie das zugehörige große Quadrat, also ~~handelt~~ handelt es sich um den Satz des Pythagoras, denn:

$a^2 + b^2 = c^2$

Schreibe deine Gedanken und Empfindungen zu diesem Bild auf.
Welche mathematischen Sätze fallen dir dazu ein?



Die Figur besteht aus mehreren Quadraten und Dreiecken. Einige Seitenlängen könnte man, wenn es ein paar Längenangaben gäbe, mit den Strahlensätzen berechnen. Allerdings wäre dafür eine Hilfslinie nötig.
Außerdem ist es mehr oder weniger ein Figur die nur aus dem Satz des Pytagoras besteht. [$a^2 + b^2 = c^2$]

MSG Schülerideen zur Einstiegsaufgabe

Es entsteht ein Bild, welches symetrisch ist. Die Spiegelachse geht durch C des Ursprungsdreieck und fällt als Lot (Höhe) auf h_c

Beim Ursprungsdreieck ist $a=b$.

↳ Der Umfang besteht dann aus $2a+c$

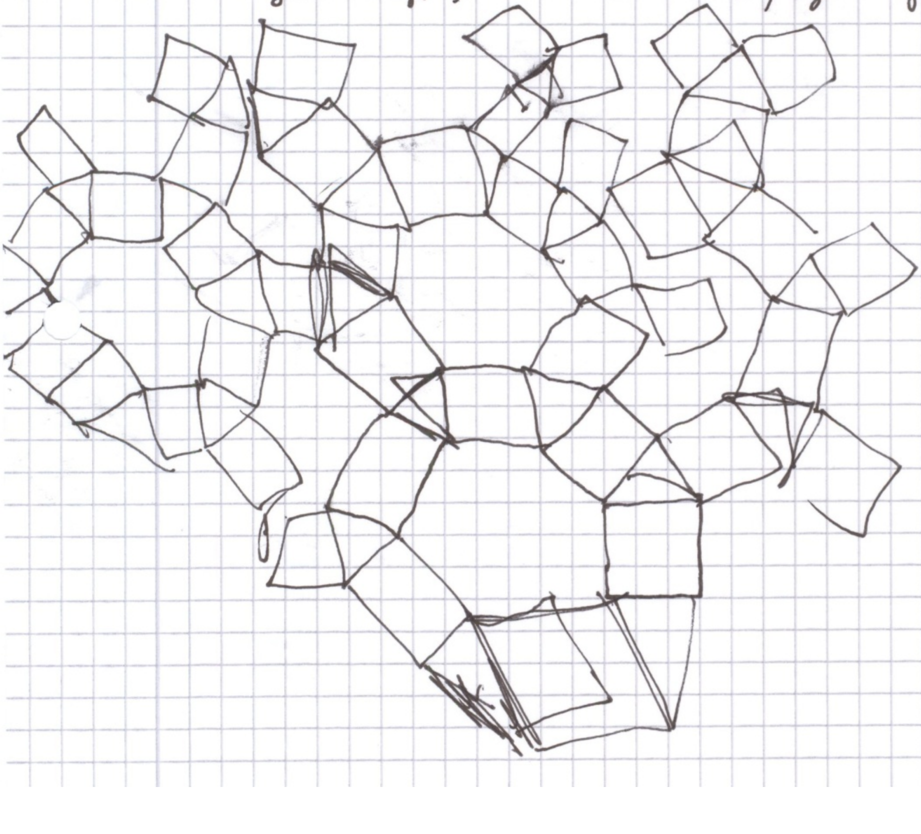
⇓

Durch Satz des Pythagoras entstehen Quadrate über den Seiten, diese dann die Hypothenuse eines gleichschenklig-rechtwinkliges-Dreieck bilden. Dies wird dann mit den kleinen Dreiecken weitergeführt

Alle Dreiecke sind ähnlich und alle Quadrate sind ähnlich

Der Streckfaktor des Dreiecks was durch das Quadrat des Schenkels des anderen Dreiecks ensteht entspricht der Hypothenusenlänge geteilt durch Wurzel 2.

Baum, Unendlichkeit, Ähnlichkeit, Reihe/Ursache,
Ausbreitung wie ein Gerücht → logische Abfolge →
Gesellschaft, Freunde und Feinde, Pythagoras, Sechseck



1) Es sieht aus wie ein Deko für eine unwirkliche Figur. ≈ abstrakte Figur, Kunst

2) Es erinnert an einen Baum ... Stammbaum

- alle Formen sind mit jeweils ein oder zwei Seiten verbunden
- an dem Dreieck sind jeweils 3 Quadrate
  ↳ durch diese setzt sich die Kette fort. ≈ Stammbaum

Es sieht sehr gleichmäßig aus, weil an einem Dreieck immer 3 Quadrate sind. Es könnte eine Darstellung zum Satz des Pytagoras sein da man beim Satz auch die Quadrate benutzt. $|a^2+b^2=c^2|$
Es könnte auch eine Aufgabe sein bei der man die Flächeninhalte des Dreiecks bestimmen muss. Vieleicht ist es auch eine Darstellung von Perioden, da man nach diesem Schema das Gebilde immer weiterführen kann. Ich finde die Symmetrie sehr interessant

Es sieht aus wie ein Baum.
Die Flächen treffen sich nie.
Es geht unendlich lange weiter
Wenn man „auf die nächste Stufe geht"
(aus den entstandenen Quadrat
wieder Satz des Pythagoras macht)
. Hat man dreiecke
Anzahl der $\Delta = (X \cdot 2) + 1$
X: anzahl der Stufe
(Wenn man nur das „Urquadrat
hat" ist es Stufe 0)

Man kann ~~die Größe~~ den
Flächeninhalt eines Dreiecks ausrechnen

$$\frac{\text{Urquadrat}}{X} = \text{Flächeninhalt des Dreiecks}$$

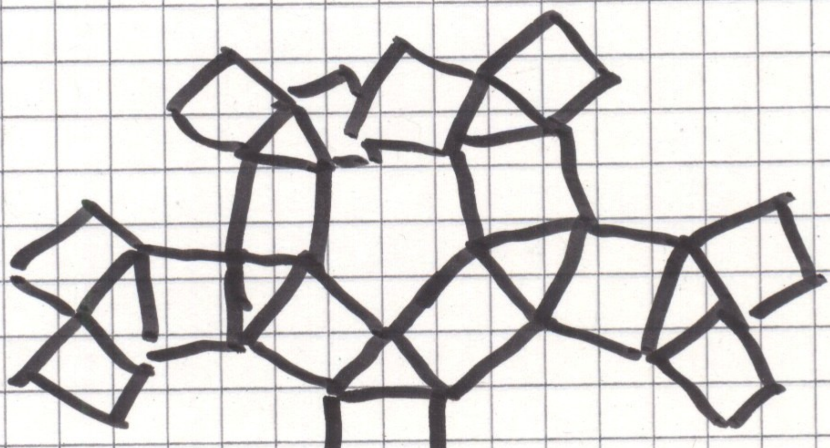
X: ist Die Stufe der „verdoppelung"
Wenn nur das ~~Urdreieck~~
Urquadrat da ist, ist die
Stufe 1.
Für jede ~~verdoppelung~~ „nächste
Stufe" (Beschreibung s. Oben)
steigt X um 1.

Es sieht aus wie eine Anreihung von Verbildlichungen des Satzes des Pythagoras ($a^2+b^2=c^2$). Da es ein rechtwinkliges Dreieck ist, an dessen Seiten Quadrate (^{2}) (a^2, b^2, c^2) sind. Das Ganze wird immer kleiner und ich frage mich, wie das Bild fortgeführt aussieht, wenn man die letzten Schritte fast nicht mehr erkennen kann. Auch ist die Symmetrie des Gebildes interessant.

- Baum
- Netz
- Figur
- Diagram

[- Kunst]

-



Es ist eine Figur bei der immer wieder an die seiten der Dreiecke Quadrate gezeichnet werden. Dies sieht aus wie die Figur mit der man den satz des Pythagoras erklärt, doch in diesem Fall ~~ist es eher~~ ~~eine~~ wird aus einem Quadrat ~~im~~ immer wieder weitere gezeichnet sodass eine größere Figur ~~sodass~~ entsteht. ~~M~~ Wenn durch die mitte des ersten 90° Winkels des ersten Dreieks eine Gerade zieht dann entsteht eine ~~Symetr~~ Symetrieachse an der die Figur sozusagen gespiegelt wird.

Rechtwinklige Dreiecke → Pythagoras-figuren.
Alte Katheten werden neue Hypotenusen ⇒ immer kleiner

Selbstähnlich: von jedem Dreieck (nach oben) ausgehend ähnlich

immer um $\sqrt{2}$ kleiner (nächstes)

ist ein unendliches Fraktal

Die ~~zusammen~~ aller Flächeninhalte der n ten Stufe bei Hypotenuse = 1

1. Stufe = $2^{(n-1)} \cdot \sqrt[2^n]{2} \cdot 1/2$

Literaturverzeichnis

AEBLI, H. (1961): Grundformen des Lehrens, Stuttgart: Klett.

ANDERSON, J. (2001): Kognitive Psychologie, Heidelberg: Spektrum.

ARBINGER, R. (1997): Psychologie des Problemlösens, Darmstadt: Primus.

BAPTIST, P./WINTER, H. (2001): Überlegungen zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Oberstufe des Gymnasiums. Mathematik – Deutsch – Englisch, in: TENORTH, H.-E. (Hrsg.), Kerncurriculum Oberstufe, S. 54–77, Basel: Belz.

BARZEL, B./BÜCHTER, A./LEUDERS, T. (2007): Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin, Berlin: Cornelsen.

BARZEL, B./WEIGAND, H.-G. (2008): Medien vernetzen, in: ml, 146, S. 4–10.

BAUER, L. A. (1988): Mathematik und Subjekt, Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag.

BAUMERT, J./STANAT, P./DEMMRICH, A. (2001): Theoretische Grundlagen, in: PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im nationalen Vergleich, S. 19–31, Deutsches PISA-Konsortium, Opladen: Leske und Buderich.

BEA, W./SCHOLZ, R. W. (1995): Graphische Modelle bedingter Wahrscheinlichkeit im empirischen Vergleich, in: JMD, 16(3/4), S. 299–327.

BECKER, N. (2006): Die neurowissenschaftliche Herausforderung der Pädagogik, Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

BLUM, W./TÖRNER, G. (1983): Didaktik der Analysis, Göttingen: Vandenhoek und Ruprecht.

BRANDL, M./NORDHEIMER, S. (2011): Zufällig vernetzt? Vernetzungen mit Stochastik im Lehrplan und darüber hinaus, in: BzMU 2011, S. 143–147, Münster: WTM–Verlag.

BRINKMANN, A. (1999): Graphische Darstellungungen mathematischer Wissensnetze, in: BzMU 1999, S. 109–112, Hildesheim: Franzbecker.

BRINKMANN, A. (2002): Über Vernetzungen im Mathematikunterricht – eine Untersuchung zu linearen Gleichungssystemen in der Sekundarstufe I, Dissertation, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg.

BRINKMANN, A. (2009): Vernetzungen im Mathematikunterricht – Aktuelle Positionen und Entwicklungsbedarf, in: BzMU 2009, S. 163–166, Münster: WTM-Verlag.

BRINKMANN, A. (2010): Vernetzungen im Mathematikunterricht – Graphische Darstellungen mathematischen Wissens als Unterrichtsmittel (öffentlicher Vortrag), in: 2. Tagung des GDM-AK-Vernetzungen im Mathematikunterricht.

BRINKMANN, A./MAASS, J./OSSIMITZ, G./SILLER, S. (2011): Vernetzungen und vernetzenden Denken im Mathematikunterricht, in: BRINKMANN, A./MAASS, J./SILLER, S. (Hrsg.), Mathe vernetzt. Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht, S. 7–21, Düsseldorf: Aulis.

BRUDER, R. (2000): Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen – Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle, in: HERGERT, W./FLADE, L. (Hrsg.), Mathematik lehren und lernen nach TIMMS – Anregungen für die Sekundarstufen, S. 69–78, Berlin: Volk und Wissen.

BRUDER, R. (2002): Lernen geeignete Fragen zu stellen. Heuristik im Mathematikunterricht, in: ml, 115, S. 4–8.

BRUDER, R. (2006): Langfristiger Kompetenzaufbau, in: BLUM, W./DRÜCKE-NOE, C./HARTUNG, R./KÖLLER, O. (Hrsg.), Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele,Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen, S. 135–151, Berlin: Cornelsen Scriptor.

BRUDER, R./BRÜCKNER, A. (1989): Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht – ein allgemeiner Ansatz, in: Pädagogische Forschung, 30, S. 72–82.

BRUDER, R./COLLET, C. (2011): Problemlösen lernen im Mathematikunterricht, Berlin: Cornelsen Scriptor.

CASOS (2012): Organizational Risk Analyzer (ORA), URL: `http://www.casos.cs.cmu.edu/projects/ora/`, [3.12.12].

CHEN, X./LI, Y. (2008): Instructional coherence in Chinese mathematics classroom – a case study of lessons on fraction division, in: International Journal of Science and Mathematics Education, 8(4), S. 711–735.

Costazza, M. (1993): Wissenschaft als soziales Subsystem, in: Fischer, R./Costazza, M./Pellert, A. (Hrsg.), Argumentation und Entscheidung. Zur Idee und Organisation von Wissenschaft, S. 45–61, Wien: Profil.

Diederich, J./Tenorth, H.-E. (1997): Theorie der Schule: Ein Studienbuch zur Geschichte, Funktion und Gestaltung, Berlin: Cornelsen.

Diepgen, R. (2003): Quadratisch? Praktisch? Gut? Pseudoerklärung und Bedeutungsarmut im Unterricht über Varianz und Standardabweichung, in: Stochastik in der Schule, 23(2), S. 28–32.

Dressler, B. (2007): Modi der Weltaneignung als Gegenstand fachdidaktischer Analysen, in: JMD, 28(3/4), S. 249–262.

Dörner, D. (1987): Problemlösen als Informationsverarbeitung, Stuttgart: Kohlhammer.

Edelmann, W. (2000): Lernpsychologie, Weinheim: Beltz.

Eichler, A./Vogel, M. (2009): Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik, Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Eigenmann, P. (1981): Geometrische Denkaufgaben, Stuttgart: Klett.

Engel, H.-J. (1991): Parkettierungen, in: Zimmermann, B. (Hrsg.), Problemorientierter Mathematikunterricht, S. 75–93, Hildesheim: Franzbecker.

Engel, J. (2007): Funktionen, Zufall, Modelle: Vernetzung von Leitideen des Mathematikunterrichts, in: BzMU 2007, S. 4–13, Hildesheim: Franzbecker.

Ev.-Bibelgesellschaft/Russland (1890): Die Bibel nach der deutschen Übersetzung Dr. Martin Luthers.

Feyerabend, P. (1980): Erkenntnis für freie Menschen, Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Filler, A. (2008): Einbeziehung von Elementen der 3D-Computergrafik in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II im Stoffgebiet Analytische Geometrie (Habilitationsschrift), Saarbrücken: VDM Verlag.

Filler, A. (2009): Modellierung in der Mathematik und in der Informatik: Wie müssen die Aufzüge fahren, damit das Chaos aufhört?, in: Brinkmann, A./Oldenburg, R. (Hrsg.), Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe, Bd. 14, Hildesheim: Franzbecker.

FISCHER, F. (2001): Gemeinsame Wissenskonstruktionen – theoretische und methodologische Aspekte. Forschungsbericht Nr. 142, Techn. Ber., München: Ludwig-Maximilian-Universität, Lehrstuhl für Empirische Pädagogik und Pädagogische Psychologie.

FISCHER, R. (1993a): Wissenschaft, Argumentation und Widerspruch, in: FISCHER, R./COSTAZZA, M./PELLERT, A. (Hrsg.), Argumentation und Entscheidung, S. 29–45, Wien: Profil.

FISCHER, R. (1993b): Drei Modelle der Wissenschaftsorganisation und ihre Grenzen, in: FISCHER, R./COSTAZZA, M./PELLERT, A. (Hrsg.), Argumentation und Entscheidung. Zur Idee und Organisation von Wissenschaft, S. 155–167, Wien: Profil.

FISCHER, R. (1993c): Unbegrenztes Netz mit Gruppen als Prinzip der Wissenschaftsorganisation, in: FISCHER, R./COSTAZZA, M./PELLERT, A. (Hrsg.), Argumentation und Entscheidung. Zur Idee und Organisation von Wissenschaft, S. 167–193, Wien: Profil.

FISCHER, R. (1993d): Was soll die Wissenschaft für die Gesellschaft leisten?, in: FISCHER, R./COSTAZZA, M./PELLERT, A. (Hrsg.), Argumentation und Entscheidung. Zur Idee und Organisation von Wissenschaft, S. 61–69, Wien: Profil.

FISCHER, R./MALLE, G. (1985): Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln, Mannheim: Beltz.

FIZ/KARLSRUHE (http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/ [3.12.12]): Zentralblatt MATH.

FLACH, W. (1994): Grundzüge der Erkenntnislehre: Erkenntniskritik, Logik, Methodologie, Würzburg: Königshausen+Neumann.

FREUDENTHAL, H. (1963): Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben?, in: MU, 9(4), S. 5–29.

FREUDENTHAL, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe, Stuttgart: Klett.

FÜHRER, L. (1997): Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung in die Fachdidaktik der Sekundarstufen, Braunschweig: Vieweg.

FÜHRER, L. (1998): Mathematikunterricht nach dem 7. Schuljahr – warum eigentlich für alle?, in: Neue Sammlung, 38, S. 489–511.

FÜHRER, L. (2002): Über einige Grundfragen künftiger Geometriedidaktik, in: math.did, 25(1), S. 55–75.

GALLIN, P./RUF, U. (1998): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz, Seelze: Kallmeyer.

GELLERT, U./JABLONKA, E. (2009): The demathematising effect of technology. Calling for critical compentence, in: Crtitical issues in mathematics education, S. 19–24.

GREEFRATH (2010): Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe, Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

GRIESEL, H./POSTEL, H./SUHR, F. (2007): Elemente der Mathematik 8. Berlin, Braunschweig: Schroedel.

GUSKI, A. (2007): Metaphern der Pädagogik. Metaphorische Konzepte von Schule, schulischem Lernen und Lehren in pädagogischen Texten von Comenius bis zur Gegenwart, Bern: Lang.

HEIDER, U. (2006): Legespiele im Mathematikunterricht der Grundschule unter besonderer Berücksichtigung des Tangrams. Examensarbeit, Diplomarbeit, Bergische Universität Wuppertal.

HEINTZ, B. (2000): Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin, Springer: Wien.

HENTIG, H. V. (2007): Mein Leben – bedacht und bejaht, München: Hanser.

HEYMANN, H. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik, Weinheim: Beltz.

HISCHER, H. (1998): ‚Fundamentale Ideen' und ‚Historische Verankerung' – dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung, in: math.did, 21(1), S. 3–21.

HISCHER, H. (2000): Klassische Probleme der Antike – Beispiele zur ‚Historischen Verankerung', in: BLANKENAGEL, J./SPIEGEL, W. (Hrsg.), Mathematikdidaktik aus Begeisterung für die Mathematik, S. 97–118, Leipzig: Klett.

HISCHER, H. (2009): Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? Vernetzung als Medium zur Weltaneignung, in: BzMU 2009, S. 635–638, Münster: WTM-Verlag.

HISCHER, H. (2010a): Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? – Vernetzung als Medium zur Weltaneignung, Hildesheim: Franzbecker.

HISCHER, H. (2010b): Vernetzungen im pädagogisch-didaktischen Kontext – vertiefende Aspekte, in: BzMU 2010, S. 401–404, Münster: WTM-Verlag.

Hischer, H. (2011): ‚Vernetzung‘ als Bildungsanspruch?, in: , S. 391–394.

Hofe, R. v. (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen, in: ml, 118, S. 4–8.

Hofe, R. v./Jordan, A. (2009): Wissen vernetzen – Beziehungen zwischen Geometrie und Algebra, in: ml, 154, S. 4–9.

Hoffkamp, A. (2011): Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen – Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse, Dissertation, TU Berlin.

Holland, G. (1988): Geometrie in der Sekundarstufe. Entdecken – Konstruieren – Deduzieren. Didaktische und Methodische Fragen, Berlin: Springer.

Humboldt, W. v. (1965): Bildung und Sprache/Besorgt durch Clemens Menze 1965, Paderborn: Schöningh.

Humboldt, W. v./Schiller, F. (1800): Humboldts Brief an Schiller vom 8. September 1800, in: Seidel, S. (Hrsg.), Der Briefwechsel zwischen Friedrich Schiller und Wilhelm von Humboldt, 2 Bde. 1962, S. 189–212, Berlin: Aufbau.

Hussmann, S./Oldenburg, R. (2008): Algebra trifft Geometrie – eine dynamische Wecheslbeziehung, in: PM, 21(50), S. 1–9.

ImpossibleWorld (2012): Jos de Mey, http://impossible.info/english/art/mey/mey7.html[3.12.12].

Jablonka, E./Bergsten, C. (2010): Theorising in mathematics education research: differences in modes and quality, in: NOMAD, 15(1), S. 25–51.

Jablonka, E./Keitel, C. (2004): Funktionale Kompetenz oder mathematische Allgemeinbildung?, in: Die Deutsche Schule, 8, Beiheft, S. 135–144.

Jahnke, T. (2001): Kleines Aufgabenbrevier. Zur Klassifizierung von Aufgaben im Mathematikunterricht, http://ddi.cs.uni-potsdam.de/HyFISCH/Arbeitsgruppen/PLIB/AG-BLK-Brandenburg/material/mathe/Aufgaben im MU.pdf [3.12.12].

Kant, I. (1787): Kritik der reinen Vernunft, Köln: Könemann (1995).

Kiesswetter, K./Rehlich, H. (1994): Farey-Spuren und andere Fährten - ein Beispiel für konvergierende Vernetzung von Materialien aus unserem ‚Hamburger Modell’, in: MU, 40(3), S. 49–62.

KIESSWETTER, K. (1991): Mathematisierung – ein Schließbogen par excellence für die Lösung von Problemen, in: ZIMMERMANN, B. (Hrsg.), Problemorientierter Mathematikunterricht, S. 95–118, Hildesheim: Franzbecker.

KIESSWETTER, K. (1993): Vernetzung als unverzichtbare Leitidee für den Mathematikunterricht, in: ml, 58, S. 5–7.

KIESSWETTER, K. (1994a): In über 3000 Jahren angewachsen: Vernetzungen rund um die irrationalen Wurzeln von einfachen quadratischen Gleichungen, in: MU, 40(3), S. 23–33.

KIESSWETTER, K. (1994b): Vernetzungen und Beweglichkeit beim Repräsentieren sind unverzichtbare Bestandteile von mathematischen Prozessen, in: MU, 40(3), S. 42–48.

KLAFKI, W. (2007): Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik: Zeitgemäße Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik, Weinheim: Beltz.

KLEIN, F. (1884): Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, Leipzig: Teubner.

KLEIN, F. (1900): Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen, Leipzig: Teubner.

KLEIN, F. (1924): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Band I, Leipzig: Teubner.

KLEIN, F. (1925): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Band II, Leipzig: Teubner.

KLEIN, F. (1974): Das Erlanger Programm, Leipzig: Teubner.

KLEIN, F. (1989): Lekcii ob ikosaedre i rešenii uravnenij pjatoj stepeni, Moskva: Nauka.

KLEINERT, E. (2005): Drei Studien zur Struktur der Mathematik, in: Hamburger Beiträge zur Mathematik, 229(12), S. 1–65.

KOCH, L. (2004): Allgemeinbildung und Grundbildung, Identität oder Alternative?, in: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 7(2), S. 183–191.

KOLLER, H.-C. (2003): Alles Verstehen ist daher immer zugleich ein Nicht-Verstehen. Wilhelm von Humboldts Beitrag zur Hermeneutik und seine Bedeutung für eine Theorie interkultureller Bildung, in: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 6(4), S. 515–531.

KOLMOGOROV, A. N. (1988): Matematika – Nauka i professija., Moskva: Nauka.

KRAMER, J. (1995): Uber die Fermat-Vermutung, in: El. Math., 50, S. 11–25.

KRAMER, J. (2000): Der große Satz von Fermat – die Lösung eines 300 Jahre alten Problems, in: AIGNER, M./BEHRENDS, E. (Hrsg.), Alles Mathematik, S. 169–179, Wiesbaden: Vieweg.

KULTUSMINISTERKONFERENZ (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.

KULTUSMINISTERKONFERENZ (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.

KVASZ, L. (2008): Patterns of change. Linguistic innovations in the development of classical mathematics, Basel: Birkhäuser.

LADENTIN, V. (2010): Pädagogische Empirie aus bildungsphilosophischer Sicht, in: GAUGER, J.-D./KRAUS, J. (Hrsg.), Empirische Bildungsforschung. Notwendigkeit und Risiko, Berlin: Konrad-Adenauer-Stiftung e.V., Sankt Augustin.

LAMBERT, A. (2006): Ein Einstieg in die reflektierende Modellbildung mit produktiven Aufgaben. Preprint Nr. 174, Techn. Ber., Universität des Saarlandes. Fachrichtung 6.1 - Mathematik.

LEHNER, H. (1979): Erkenntnis durch Irrtum als Lehrmethode, Bochum: Kamp.

LENNÉ, H. (1969): Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart: Klett.

LIETZMANN, W. (1912): Der Pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem, Leipzig: Birkhäuser.

LIETZMANN, W. (1927): Aufbau und Grundlage der Mathematik, Leipzig: Teubner.

LIETZMANN, W. (1949): Das Wesen der Mathemtik, Braunschweig: Vieweg.

LIETZMANN, W. (1952): Anschauliche Einführung in die mehrdimensionale Geometrie, München: Oldenburg.

LIETZMANN, W. (1956): Anschauliche Arithmetik und Algebra, Würzburg: Physika.

LIETZMANN, W. (1966): Altes und Neues vom Kreis, Leipzig: Teubner.

LIETZMANN, W. (1968): Der pythagoreische Lehrsatz, Leipzig: Teubner.

MAASS, J. (1988): Mathematik als soziales System: Geschichte und Perspektiven der Mathematik aus systemtheoretischer Sicht, Weinheim: Dt. Studien.

MAASS, K. (2005): Modellieren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, in: JMD, 26(2), S. 114–142.

MAASS, K. (2007): Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe I, Berlin: Cornelsen.

MACKE, G. (1990): Disziplinformierung als Differenzierung und Spezialisierung: Entwicklung der Erziehungswissenschaft unter dem Aspekt der Ausbildung und Differenzierung von Teildisziplinen, in: Zeitschrift für Pädagogik, 36(1), S. 51–72.

MAIER, H./SCHWEIGER, F. (1999): Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht, Wien: öbv und hpt.

MANDELBROT, B. (1989): Fractal geometry: what is it, and what does it do?, in: Proceedings of the Royal Society, A 423, S. 3–16.

MANHART, S. (2007): Disziplin, Fach und Studiengang. Grundbegriffe der Disziplingeschichtsschreibung, in: Zeitschrift für pädagogische Historiographie, 13(2), S. 14–22.

MANHART, S. (2008): Vermessene Moderne. Zur Bedeutung von Maß, Zahl und Begriff für die Entstehung der modernen Kultur, in: BAECKER, D./KETTNER, M./RUSTEMEYER, D. (Hrsg.), Über Kultur. Theorie und Praxis der Kulturreflexion, S. 191–218, Bielefeld: transcript.

MASON, J./DAVIS, J. (1991): Specialising, Generalising, Conjecturing, Convincing, in: ZIMMERMANN, B. (Hrsg.), Problemorientierter Mathematikunterricht, S. 37–58, Hildesheim: Franzbecker.

MENCK, P. (1986): Unterrichtsinhalte oder ein Versuch über die Konstruktion der Wirklichkeit im Unterricht. Band 293 von Europäische Hochschulschriften: Pädagogik, Basel: Lang.

MIETZNER, U. (Wintersemester 2005/06, 4. Vorlesung): Grundbegriffe von Bildung, Erziehung und Schule, Vorlesungsmitschrift: Institut für Erziehungswissenschaften, Humboldt Universität zu Berlin.

MURPHY, J./WANG, T. (2004): An Examination of Coherence in a Chinese Mathematics Classroom, in: LIANGHUO, F./NGAI-YING, W./JINFA, C./SHINQI, L. (Hrsg.), How Chinese learn Mathematics. Perspectives from Insiders. Series on Mathematics Education, Bd. 1, S. 107–123, NJ: World Scientific.

Mwakapenda, W. (2008): Understanding connections in the school mathematics curriculum, in: South African Journal of Education, 28, S. 189–202.

Neubrand, J. (2002): Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie, Hildesheim: Franzbecker.

Neubrand, M. (1990): Stoffvermittlung und Reflexion: Mögliche Verbindungen im Mathematikunterricht, in: math.did, 13(1), S. 21–48.

Nordheimer, S. (2009): Kapitelübergreifende Rückschau, in: BzMU 2009, S. 171–174, Münster: WTM-Verlag.

Nordheimer, S. (2010a): Mathematical connections at school. Understanding and facilitating connections in mathematics, in: Proceedings of the ESU-6. History and Epistemology in Mathematics Education, TU-Wien.

Nordheimer, S. (2010b): Einkleidungen als Modell-Vernetzungen im MU, in: BzMU 2010, S. 633–636, Münster: WTM-Verlag.

Nordheimer, S. (2010c): Geometrische Veranschaulichung und Bruchrechnung, in: Filler, A./Oldenburg, R./Ludwig, M. (Hrsg.), Werkzeuge im Geometrieunterricht, S. 121–148, GDM-AK Geometrie, Hildesheim: Franzbecker.

Nordheimer, S. (2011): Kapitelübergreifende Rückschau: Unterrichtsmethode Lernende vernetzen Mathematik, in: Brinkmann, A./Maass, J./Siller, S. (Hrsg.), Mathe vernetzt. Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht, S. 59–70, Düsseldorf: Aulis.

Nordheimer, S./Filler, A. (2011): Horst Hischer: Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? Vernetzung als Medium zur Weltaneignung., in: GDM-Mitteilungen, 90, S. 36–41.

Ossimitz, G./Lapp, C. (2006): Das Metanoia-Prinzip. Eine Einführung in systemisches Denken und Handeln, Hildesheim: Franzbecker.

Padberg, F. (2002): Didaktik der Bruchrechnung, Heidelberg: Spektrum.

Pehkonen, E./Ahtee, M. (2005): Levels of teachers' listening in working with open problems, in: Problem Solving in Mathematics Education. Proceedings of the ProMath 6 Meeting, S. 63–75.

Polya, G. (1970): Matematicheskoe Otkritie, Moskva: Nauka.

POPPER, K. (1971): Logik der Forschung, Tübingen: Mohr.

POPPER, K. (1973): Objektive Erkenntnis. Ein evolutionärer Entwurf, Hamburg: Hoffmann und Campe.

POSAMENTIER, A. S. (2010): The Pythagorean theorem: the story of its power and beauty, Amherst, NY: Prometheus Books.

POSAMENTIER, A. S./KRULIK, S. (1998): Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions. A resource for the mathematics teacher, Thousand Oaks: Corwin Press.

PRESMEG, N. (2006): Semiotics and the ‚Connections' Standard: Significance of Semiotics for Teachers of Mathematics, in: Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), S. 163–182.

ROTH, J. (2008): Systematische Variation. Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra, in: ml, 146(2), S. 17–21.

RUF, U./GALLIN, P. (1999): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen. Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik, Seelze: Kallmeyer.

SCHMIDT, G. (2003): Aufgabenvariation im Schulbuch, in: MU, 49(5), S. 52–62.

SCHUPP, H. (1988): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen, in: MU, 34(6), S. 5–16.

SCHUPP, H. (2002): Thema mit Variationen, Berlin: Franzbecker.

SCHUPP, H. (2003): Variatio delectat!, in: MU, 49(5), S. 4–12.

SCHWARZ, W. (2006): Heuristische Strategien des Problemlösens. Eine fachmethodische Systematik für die Mathematik, Münster: WTM–Verlag.

SCHÖNWALD, H. (1993): Über die fraktale Struktur mehrstufiger Zufallsexperimente, in: Stochastik in der Schule, 13(1), S. 23–29.

SENATSVERWALTUNG/BILDUNG/JUGEND/SPORT (2004a): Rahmenlehrplan Grundschule. Mathematik. Berlin.

SENATSVERWALTUNG/BILDUNG/JUGEND/SPORT (2004b): Schulgesetz für das Land Berlin vom 26. Januar 2004.

SENATSVERWALTUNG/BILDUNG/JUGEND/SPORT (2006): Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I. Mathematik. Berlin.

STACHOWIAK, H. (1973): Allgemeine Modelltheorie, Wien: Springer.

STAR, S./GRIESEMER, J. (1989): Institutional Ecology, ‚Translations' and Boundary Objects: Amateurs and Professionals in Berkeley's Museum of Vertebrate Zoology, in: Social Studies of Science, 19(3), S. 387–420.

STEINER, H.-G. (1981): Fragen des Geometrieunterrichts, Köln: Aulis.

STEINER, H.-G. (1989): Philosophische und epistemologische Aspekte der Mathematik und ihr Einfluß auf den Mathematikunterricht, in: Mathematische Semesterberichte, 36(1), S. 47–60.

STICHWEH, R. (1984): Zur Entstehung des modernen Systems wissenschaftlicher Disziplinen. Physik in Deutschland. 1740 – 1890, Frankfurt am Main: Suhrkamp.

STOWASSER, R. (1991): Extremale Rechtecke – eine Problemsequenz mit Kurzfilm, in: ZIMMERMANN, B. (Hrsg.), Problemorientierter Mathematikunterricht, S. 119–130, Hildesheim: Franzbecker.

TENORTH, H.-E. (1994): Das ‚Kanon'-Problem, in: ‚Alle alles lehren': Möglichkeiten und Perspektiven allgemeiner Bildung, S. 122–141, Darmstadt: Wiss. Buchges.

TENORTH, H.-E. (2006a): Erziehung zur Persönlichkeit, in: WALTER-RAYMOND-STIFTUNG/BDA (Hrsg.), Erziehung und Bildung heute, S. 7–24, Berlin: GDA.

TENORTH, H.-E. (2006b): Professionalität im Lehrerberuf. Ratlose Theorie. Gelingende Praxis, in: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9(4), S. 580–597.

TENORTH, H.-E. (2010): Genese der Disziplinen – Die Konstitution der Universität. Zur Einleitung, in: TENORTH, H.-E. (Hrsg.), Geschichte der Universität Unter den Linden 1810 - 2010. Genese der Disziplinen – Die Konstitution der Universität. 4, S. 9–40, Berlin: Akademie.

TJURIN, A. (1989): Vorwort, in: Lekcii ob ikosaedre i rešenii uravnenij pjatoj stepeni von Felix Klein, Moskva: Nauka.

VESTER, F. (1992): Leitmotiv vernetztes Denken: für einen besseren Umgang mit der Welt, München: Heyne.

VESTER, F. (1993): Unsere Welt – ein vernetztes System, München: dtv.

VESTER, F. (1994): Denken, Lernen, Vergessen: was geht in unserem Kopf vor, wie lernt das Gehirn, und wann läßt es uns im Stich?, München: dtv.

VESTER, F. (1995): Neuland des Denkens: vom technokratischen zum kybernetischen Zeitalter, München: dtv.

VESTER, F. (2002): Die Kunst vernetzt zu denken. Ideen und Werkzeuge für einen neuen Umgang mit Komplexität, München: dtv.

VOHNS, A. (2005): Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen, in: JMD, 26(1), S. 52–79.

VOHNS, A. (2007): Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Entwicklungen und Perspektiven eines fachdidaktischen Prinzips, Norderstedt: Books on Demand.

VOHNS, A. (2010): Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen, in: JMD, 31(2), S. 227–255.

VOLLRATH, H.-J. (1993): Paradoxien des Verstehens von Mathematik, in: JMD, 14(1), S. 35–58.

VOLLRATH, H.-J. (2001): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe, Berlin: Spektrum.

WAGENSCHEIN, M. (1968): Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch, Basel: Beltz.

WAGENSCHEIN, M. (1970): Ürsprüngliches Verstehen und exaktes Denken, I, II, Stuttgart: Klett.

WALSCH, W. (1995): Aufgabenfamilien – Beispiele und didaktische Anmerkungen, in: Mathematik in der Schule, 33(2), S. 78–82.

WANG, F. T./C. C. HSIUNG, A. (1942): A theorem on the tangram, in: American Math. Monthly, 49(49), S. 596–599.

WEBER, K. (2000): Lösen komplexer Aufgaben -– ein wichtiges Element der Unterrichtskultur, in: HERGERT, W./FLADE, L. (Hrsg.), Mathematik lehren und lernen nach TIMMS — Anregungen für die Sekundarstufen, S. 107–111, Berlin: Volk und Wissen.

WEDGE, T. (2010): Connecting theories in mathematics education: from bricolage to professionalism, in: NOMAD, 15(1), S. 59–77.

WERTHEIMER, M. (1964): Produktives Denken, Frankfurt am Main: Kramer.

WERTHEIMER, M. (1986): Über Gestalththeorie. Reprint. Vortrag vor der KANT-Gesellschaft, Berlin, am 17. Dezember 1924, in: Gestalt Theory, 7(2), S. 99–120.

WILLE, R. (2005): Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen, in: LENGNINK, K. (Hrsg.), Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen, S. 3–21, Darmstadt: Allgemeine Wissenschaft.

WINTER, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik, Braunschweig: Vieweg.

WINTER, H. (1999): Gestalt und Zahl – Perspektiven eines kreativen Mathematikunterrichts in der Schule, in: Beitrag aus dem Berichtsband zum Symposium über Kreatives Denken und Innovationen in mathematischen Wissenschaften Friedrich-Schiller-Universität Jena, S. 1–15.

WITTENBERG, A.-I. (1963): Bildung und Mathematik, Stuttgart: Klett.

WITTMANN, E. (1974): Themenkreismethode und lokales Ordnen, in: MU, 20(1), S. 5–18.

WITTMANN, E. (1980): Grundfragen des Mathematikunterrichts, Leipzig: Teubner.

WITTMANN, E. (1995): Mathematics education as a ‚Design Science‘, in: Educational Studies in Mathematics, 29(4), S. 355–375.

WITTMANN, G. (2003): Ebene Geometrie mit Geobrett und Tangram, in: ml, 119, S. 8–12.

ZAIS, T. (1995): Das mathematische Modellieren als Mittel für das Lernen von Mathematik, in: BzMU 1995, S. 540–543, Hildesheim: Franzbecker.

ZAIS, T./GRUND, K. (1991): Grundpositionen zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht bei besonderer Berücksichtigung des Modellierungsprozesses, in: MU, 37(5), S. 4–17.

ZIMMERMANN, B. (1991): Ziele, Beispiele, Rahmenbedingungen, in: Problemorientierter Mathematikunterricht, S. 9–36, Hildesheim: Franzbecker.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbstständig ohne fremde Hilfe verfasst und nur die angegebene Literatur und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Swetlana Nordheimer

Berlin, den 3. März 2014